

基于灰色模型的教育事业人口发展预测

摘要

预测教育事业人口数据具有重要的意义，可以帮助政府、教育机构以及研究者更好地规划和管理教育系统，以满足社会的需求并提高教育质量。包括规划教育资源分配、设计教育政策、预测师资需求等，立足实现更有效、更公平、更有质量的教育体系，以适应不断变化的社会需求和挑战。

对于问题一，首先收集 **2005-2023** 年湖南省各学段在校生总人数。由于样本总数少、稳定性差、难以直接捕捉到时序数据的周期性变化，不适用于神经网络与传统时序模型等对数据量、数据稳定性等要求高的预测模型。我们建立**单变量灰色模型**对 2005-2023 年湖南省各学段在校总人数分别进行拟合，建立**时间序列响应方程**，从而实现对湖南省各学段未来 **2024-2035** 年的**基于小样本时序数据的预测**。仅检验，该模型在样本少且稳定性差的基础上在各学段数据分别获得 **0.10921**、**0.01758**、**0.04095**、**0.01803**、**0.02364** 的低误差值。

对于问题二，查询国家有关各不同学段教职工与学生的配备比例标准，根据问题一预测出的各学段学生总人数，推算出 2024-2035 年每年的教职工总数。然后再次查阅资料确定不同学段教师编制所占教职工编制的不同比例，使用对应比例乘以当年教职工总量即为当年教职工总量。最后在每一学段中使用每一年的教师总量减去上一年的教师总量，即为当年该学段的教师需求总数。

对于问题三，首先计算每一年的退休减员数。根据 2022 年所有学段教师年龄分布情况与国家法定退休年龄，在 2024-2035 年间，用当年年份减去 2022 即为**增长岁数**，若增长岁数加上 2022 年时的年龄在当年达到法定退休年龄则退休。对于师范院校毕业生的院校，首先根据学制不同**将本科生于专科生分别进行预测**。首先根据 2020 年-2023 年的在校生人数计算其人数**平均增长率**，根据平均增长率推算每一年的在校人数中的**学制年级人数结构**，进而确定毕业年级人数在全校人员中的占比。随后使用灰色模型对 2024-2035 年毕业生数据进行预测，最后与需求总数和退休减员数汇总，测算出每年的新增教师人数。

对于问题四，首先根据 2022 年所有科目教师数量占学段总教师数量的比例推算出**现实不同科目教师的组成结构**，使用每科教师的比例乘以每年新增教师数即为各学段缺编科目教师的**基础增长人数**。但考虑到题中所给科目均为严重性缺编科目，因此在基础增长的同时还应考虑扩大上述科目的教师队伍，让其向**国家标准值**靠近。故查阅有关文件后分别确定缺编科目的国家有关师资标准，按照各缺编科目在各学段中占学段教师总量的占比来计算**理想教师总量**，最后使用理想总量减去现实总量，即可得到针对于缺编科目的**缺编增量**，将其与基础增量相加变为最终的各学段缺编科目新增教师数。

关键字： 人口统计 灰色模型 教育事业发展

目录

一、问题重述	4
1.1 问题背景	4
1.2 问题描述	4
二、问题分析	4
三、模型假设	5
四、符号说明	5
五、模型的建立与求解	6
5.1 问题一模型的建立与求解	6
5.1.1 数据收集	6
5.1.2 灰色模型的建立	7
5.1.3 灰色模型求解湖南省各学段在校学生人数	10
5.2 问题二模型的建立与求解	16
5.2.1 教职工需求量	17
5.2.2 专任教师需求量	17
5.3 问题三模型的建立与求解	19
5.3.1 推算 2024-2035 年间退休减员数	20
5.3.2 推算 2024-2035 年间师范生毕业人数	20
5.3.3 推算 2024-2035 年间新增教师数	23
5.4 问题四模型的建立与求解	23
5.4.1 确定问题科目教师所占学段总数的现实情况比例	24
5.4.2 确定问题科目教师所占学段总数的理想情况比例	26
5.4.3 推算缺编科目教师新增人数	28
六、模型的评价与推广	29
6.1 模型优点	29
6.2 模型缺点	29
6.3 模型推广	29
参考文献	29
附录 A 结果表格	31

附录 B 源代码	39
2.1 问题一相关源代码	39
2.2 问题二相关源代码	44
2.3 问题三相关源代码	46
2.4 问题四相关源代码	48

一、问题重述

1.1 问题背景

最近几年，湖南省每年出生人口数不断下降。从 2016 年的 92.31 万降到 2022 年的 41.2 万。人口出生量的下降其原因与育龄妇女数量、育龄妇女生育率等密切相关，也受到了社会、经济等各方面影响，同时也对后续的教育、社会、经济产生重大影响。请根据提供有附件数据或者自行查询相关数据，建立数学模型，完成下面问题。

1.2 问题描述

问题一预测出 2024-2035 年之间湖南每年的幼儿园、小学、初中、高中（含职高）的分学段的在校学生总人数。

问题二计算出 2024-2035 年之间湖南每年的幼儿园、小学、初中、高中（含职高）的分学段的教师需求总量。

问题三测算出 2024-2035 年之间湖南每年的幼儿园、小学、初中、高中（含职高）的分学段的需新增教师人数（教师需求总量 + 退休自然减员数 - 预计当年定向与非定向师范毕业生数）。

问题四测算出 2024-2035 年之间湖南每年的科学（小学）、信息技术（小学、初中、高中）、心理健康教育（小学、初中、高中）、体育（小学、初中、高中）、音乐、美术等六科实际需新增教师数。

二、问题分析

对于问题一，要预测 2024-2035 年间湖南省各学段的在校学生总人数，首先需要先获取历年相关数据，再根据历史数据进行时序预测。本文收集了 2005 年到 2022 年间的湖南全省各学段在校学生总人数数据。由于收集到的数据量有限，且预测的时期相对较短，为小样本短期预测问题，故选择灰度模型 $GM(1,1)$ 对 2024-2035 的学生总人数进行预测。

对于问题二，首先根据问题一中预测出的 2024-2035 年间湖南省各学段在校学生总数，结合国家最新有关教职工与学生的配备比例标准，推算出各学段的教职工总数，然后根据国家有关规定专任教师编制在教职工编制中所占的比例推算出教师的总数。再使用当年总数减去去年总数即为当年的需求总数。

对于问题三，要测算出 2024-2035 年之间湖南每年的各学段的新增教师人数，需要先求出教师需求总量、退休自然减员数与预计当年定向与非定向师范毕业生数。教师需求总量在问题二中已经求出。对于退休自然减员数，可以根据题给数据求出 2022 年所有学段教师的年龄分布情况，再计算出其每年达到退休标准的人数。对于师范毕业生

数，可以由题给数据计算师范院校在校人数的增长率，利用增长率分别求出 2020-2022 年间的毕业人数，再根据灰色模型对 2024-2035 年的毕业人数进行预测。

对于问题四，由于上述四门科目在对应学段中存在严重缺编现象，因此需要单独考虑其新增人数。首先通过题给数据结合查阅资料确定 2022 年的各学段各科目现有教师体系结构，用此比例乘以问题三中确定的每年新增教师数，可以统计出在不考虑缺编情况下 2024-2035 年依照现有结构发展的新增教师数量。然后参考国家有关规定确定各缺编科目的标准配备比例，用此比例乘以预测的教师总量即可得到理想教师数量，得到考虑缺编情况下的理想教师数量，从而获取理想情况与现实情况的差额，也作为新增教师数的一部分。

三、模型假设

1. 假设未来湖南省各学段在校学生基本符合历史规律，入学人数与在校人数均无重大变故。
2. 假设幼儿园的全职教职工数量即为专任教师数量。
3. 假设所有男女教师分别按照法定年龄退休，不考虑退休返聘等特殊情况。
4. 假设题给数据中所有五年年龄区间的教师人数呈均匀分布。
5. 假设本科类示范学校四年毕业，专科类示范学校三年毕业，且所有在校生均按时毕业。

四、符号说明

符号	符号解释	符号单位
$\mathbf{x}^{(0)}$	原始数据序列	/
x	实际数据值	/
\hat{x}	预测数据值	/
$\lambda(k)$	时间为 k 的数据级比值	/
a	发展系数	/
b	灰作用量	/
$S_i(a)$	第 i 年的学生人数	万人
$T_i(a)$	第 i 年的教职工人数	万人

符号	符号解释	符号单位
$T_i^1(a)$	第 i 年的教师人数	万人
$T_i^2(a)$	第 i 年的教师需求总数	万人
$D(T_i(a))$	第 i 年的教师自然退休减员数	万人
$w_1(a)$	教职工与学生比例系数	/
$w_2(a)$	专任教师与学生比例系数	/
$w_3(a)$	专任教师与教职工比例系数	/

五、模型的建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

5.1.1 数据收集

本题要求预测未来 2024 年-2035 年之间湖南省每年的幼儿园、小学、初中、高中的各学段在校学生总人数。为了作出准确有效的预测，本文首先从湖南省教育厅政府网站查阅历年《全省教育事业发展概况》，收集 2005-2022 年间所有学段在校学生总人数，包括幼儿园、小学、初中、普高、职高，详细数据如表 1 所示。

表 1 2005-2022 年间湖南省各学段在校学生人数 (单位: 万人)

年份	幼儿园	小学	初中	高中		年份	幼儿园	小学	初中	高中	
				普高	职高					普高	职高
2005	82.17	419.83	297.26	131.85	70.67	2014	203.17	473.84	220.63	105.7	64.48
2006	88.75	429.31	248.91	135.71	75.78	2015	216.63	488.86	222.41	107.44	64.8
2007	93.76	444.84	223.58	130.73	83.06	2016	224.93	501.81	225.05	110.91	66.09
2008	105.95	458.44	214.37	119.54	76.35	2017	228.99	511.66	229.63	114.61	68.37
2009	120.79	469.15	214.35	106.43	80.87	2018	225.22	521.98	240.46	117.55	65.4
2010	141.91	479.2	214.92	101.9	76.48	2019	227.61	528.77	248.25	122.14	66.74
2011	163.74	490.32	216.34	101.38	77.88	2020	231.39	534.25	251.97	127.34	68.3
2012	176.41	473.79	211.11	102.66	73.42	2021	229.39	530.06	257.4	135.41	74.66
2013	191.24	467.81	214.28	104.1	65.07	2022	216	523.1	263.74	142.23	74.63

通过以上收集的数据,为了更好地反洗各学段在校人数随时间变化规律,分别绘制出 2005-2022 年间幼儿园、小学、初中、普高、职高五个学段的散点图,如图 (1) 所示。

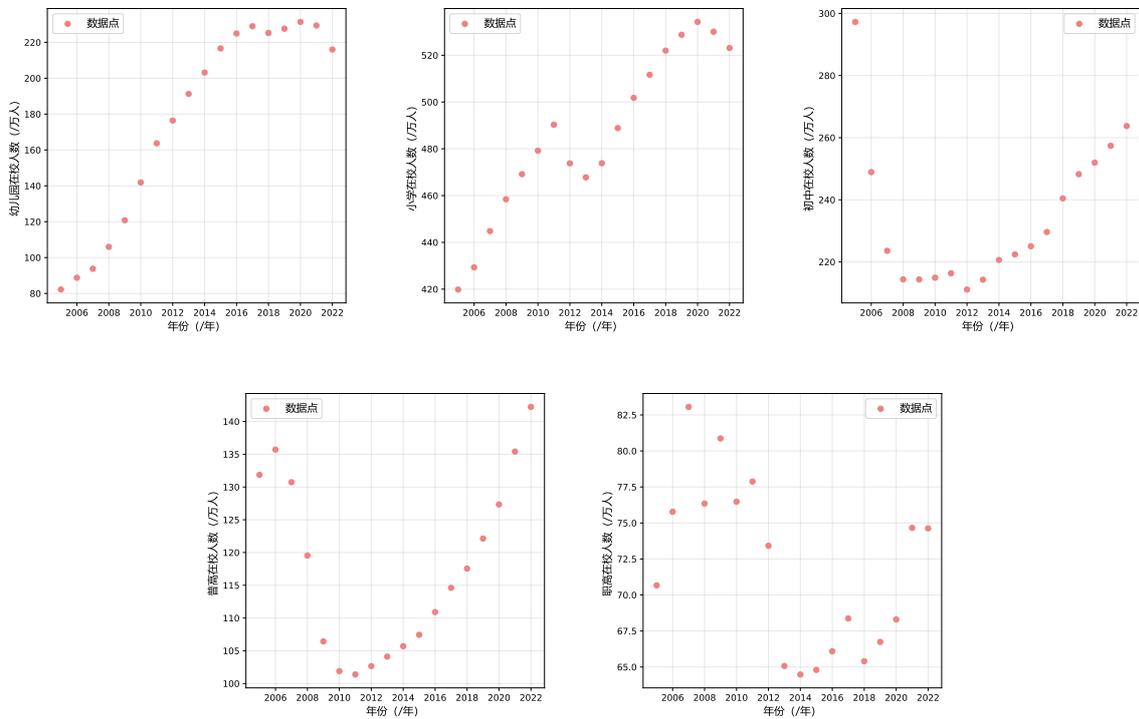


图 1 2005-2022 年间湖南省各学段在校人数散点图

根据对散点图的观察可知,已知时间序列较短,无法观测出数据随时间波动的周期性,且在湖南省职高在校人数中,发现 2012 年前后变化趋势较大,难以总结规律,故对时间周期依赖性较强、对时序数据稳定性较强的时序预测模型不适用于本题。

5.1.2 灰色模型的建立

由于收集到的数据仅限于 2005-2022 年,总样本量较少,不适用于神经网络、长短期记忆网络等对样本量要求较大的深度学习方法,网络容易在迭代训练的过程中陷入过拟合,缺乏在新时间序列上的泛化能力。因此,本文选择适用于样本数量少、预测时间周期短的灰色模型进行预测。

灰色模型预测是一种在含有不确定因素的系统之上,根据已知确定的数据序列来实现对未知数据进行预测的方法。灰色模型预测通过鉴别系统因素之间发展趋势的相异程度,对数据序列进行关联分析,在原始数据的基础上寻找系统的变动规律,从而生成有较强规律性的数据序列,然后建立相应的微分方程模型,从而预测事物未来发展趋势的状况。

灰色模型可以针对数据完整性和可靠性较低的数据序列进行有效预测,其利用微分方程来充分挖掘数据的特性导致灰色模型建模所需信息少,剪度高,运算简便并且易于

检验，尤其适合进行样本数量小的短期预测。根据预测变量的数量，灰色模型可以分为 $GM(1,1)$ 与 $GM(1,N)$ 两种模型，前者对单一变量进行预测，后者对 N 个变量进行预测。由于本题仅需预测各学段的在校人数，故采用 $GM(1,1)$ 模型，其主要步骤包含记极比较验、平移变换、构造微分方程、系数求解，具体过程如图所示。

Step1: 级比较验 设原始数据 $\mathbf{x}^{(0)}$ 如式 (1) 所示。

$$\mathbf{x}^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \dots, x^{(0)}(n)\} \quad (1)$$

其中 n 为时间序列长度， x 表示对应时间序列下的具体特征值。在构建灰色模型前，为确保序列数据适合构建模型，需要先对所有序列数据计算如式 (2) 所示的极比值。

$$\lambda(k) = \frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)}, k \in \{2, 3, \dots, n\} \quad (2)$$

若极比值落在如式 (3) 所示的范围内，则可直接使用原始数据构建灰色模型，否则需要对 $\mathbf{x}^{(0)}$ 进行平移处理，直到 $\lambda(k)$ 落到式 (3) 的范围内，才可开始构建模型。

$$e^{-\frac{2}{n+1}} \leq \lambda(k) \leq e^{\frac{2}{n+1}} \quad (3)$$

验证极比值的目的在于检验序列数据之间的显著性差异，确保序列数据不依赖于特定分布假设、适用于小样本或非正态分布数据、并且对异常值有一定容忍度，依次保障预测的准确性。

Step2: 平移变换 对于初始值 $\lambda(k)$ 没落在限定范围内的值，可以通过添加常数项来对 $\mathbf{x}^{(0)}$ 的全体元素进行如式 (4) 所示的进行平移，变为 $\mathbf{y}^{(0)}$ ，然后再进行极比值检验，直到 λ 满足式 (3) 为止。

$$y^{(0)}(k) = x^{(0)}(k) + c, k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4)$$

Step3: 构造微分方程 由于原始数据 $\mathbf{x}^{(0)}$ 通常数据量较少，难以直接捕捉数据规律，因此对 $\mathbf{x}^{(0)}$ 进行一次累加，得到 $\mathbf{x}^{(1)}$ ，即为 $\mathbf{x}^{(0)}$ 的 AOG-1 值如式 5 所示。

$$\mathbf{x}^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\} \quad (5)$$

其中 $x^{(1)}$ 的值如式 6 所示，为 $\mathbf{x}^{(0)}$ 中当前时间序列之前的特征值之和。

$$x^{(1)} = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i) \quad (6)$$

累加后的数据规律变化情况如图 2 所示。以 2015-2022 年间湖南省幼儿园在校人数为例，极少的数据量很难直接捕捉到明显变化关系，经过如式 (5) 所示的累加后发现明显变化趋势。

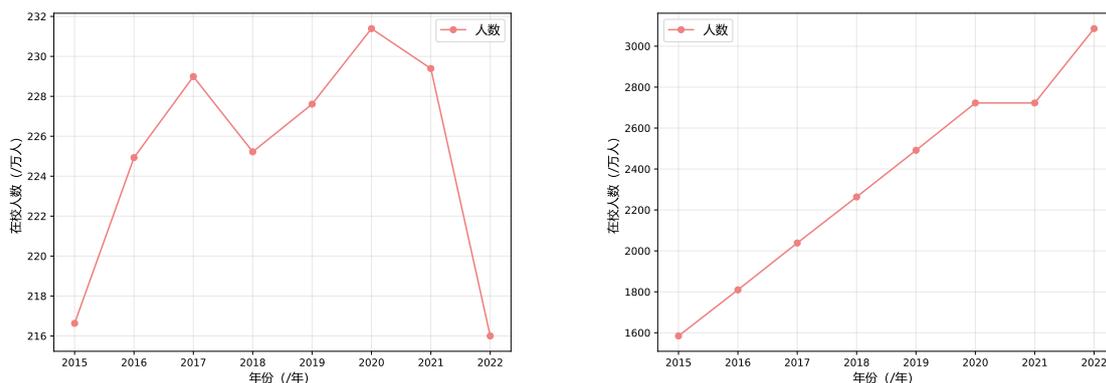


图2 2015-2022年间湖南省幼儿园在校人数。

经过整理，得到此时 $GM(1,1)$ 的原始模型如式 (7) 所示。其中 a 与 b 为待求参数。

$$x^{(0)}(k) + ax^{(1)}(k) = b \quad (7)$$

然而，AOG-1 值只是将 $\mathbf{x}^{(0)}$ 变换为数据变化规律更为明显的 $\mathbf{x}^{(1)}$ ，为了进一步能够利用数据变化规律作出预测，借助 $\mathbf{x}^{(0)}$ 与 $\mathbf{x}^{(1)}$ 求出如式 (8) 所示的紧邻值序列 $\mathbf{z}^{(1)}$ 。

$$\mathbf{z}^{(1)} = \{z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n)\} \quad (8)$$

其中 $z^{(1)}$ 的值如式 (9) 所示，为 $\mathbf{x}^{(1)}$ 序列中对应序列相邻特征值的平均值。

$$z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}(x^{(1)}(k-1) + x^{(1)}(k)) \quad (9)$$

紧邻值序列通过表达原始数据中相邻数据之间的差值，帮助灰色模型显著地提取数据变化的信息，为构建后续的微分方程提供了依据。

求得紧邻值序列后，可以构造 $GM(1,1)$ 的基本形式为式 (10)。

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad (10)$$

拟合白化方程如式 (11) 所示。

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)}(t) = b \quad (11)$$

又因为 $\mathbf{x}^{(0)}$ 与 $\mathbf{x}^{(1)}$ 均为离散值，结合式 (6) 可得式 (12)

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = x^{(1)}(t) - x^{(1)}(t-1) = x^{(0)}(t) \quad (12)$$

移项得式 (13)

$$x^{(0)}(t) = -ax^{(1)}(t) + b \quad (13)$$

Step4: 系数求解 此时方程左边为已知数。右边为未知数 a 与 b , 可用最小二乘法求出。首先分别构造如式 (12) 所示的数据矩阵 B 与向量 Y 。

$$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中 $z^{(1)}$ 为式 (8) 构造的紧邻值序列。由以上数据矩阵 B 与数据向量 Y 可知, 系数的最小二乘法求得的最优解如式 (15) 所示。

$$(a, b)^T = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (15)$$

确定未知系数的最优解后可确定式 (11) 微分方程的解如式 (16) 所示。

$$\hat{x}^{(1)}(1)(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-ak} + \frac{b}{a}, k \in \{1, 2, \dots, n-1\} \quad (16)$$

但 $\hat{x}^{(1)}(1)$ 是经过一次累加后的值, 并不是原始数据, 因此继续通过式 (6) 化简得到式 (17), 将其转换为原始值。

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k), k \in \{1, 2, \dots, n-1\} \quad (17)$$

又因为有式 (18)。

$$\hat{x}^{(1)}(1) = \hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1) \quad (18)$$

将式 (16) (17) 代入到式 (16) 中, 可求得如式 (18) 所示的最终可用于直接求解的微分方程。

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) (1 - e^a) e^{-ak}, k \in \{1, 2, \dots, n-1\} \quad (19)$$

5.1.3 灰色模型求解湖南省各学段在校学生人数

由图 1 中湖南省普高与职高在校生人数变化情况可知, 高中阶段的普高与职高两种学校总在校生人数变化趋势较大, 故将普高与职高数据分别进行预测, 最后计算结果时再将两者合并为高中学段的在校生人数。

因此, 在本题的背景下, 需要通过收集的 2005-2022 年间湖南省全省幼儿园、小学、初中、普高、高中各个学段的在校生数据, 使用 $GM(1, 1)$ 模型分别完成对 2024-2035 年各学段在校生人数的预测。

为确保数据大小适合使用 $GM(1, 1)$ 模型进行建模, 首先对数据进行极比值验证。由式 (2) 可求出原始数据的极比值 $\lambda(k)$ 如表 2 所示。

表 2 2005-2022 年间湖南省各学段数据极比值

年份	幼儿园	小学	初中	高中		年份	幼儿园	小学	初中	高中	
				普高	职高					普高	职高
2005	-	-	-	-	-	2014	0.941	0.987	0.971	0.985	1.009
2006	0.926	0.978	1.194	0.972	0.933	2015	0.938	0.969	0.992	0.984	0.995
2007	0.947	0.965	1.113	1.038	0.912	2016	0.963	0.974	0.988	0.969	0.98
2008	0.885	0.97	1.043	1.094	1.088	2017	0.982	0.981	0.98	0.968	0.967
2009	0.877	0.977	1	1.123	0.944	2018	1.017	0.98	0.955	0.975	1.045
2010	0.851	0.979	0.997	1.044	1.057	2019	0.989	0.987	0.969	0.962	0.98
2011	0.867	0.977	0.993	1.005	0.982	2020	0.984	0.99	0.985	0.959	0.977
2012	0.928	1.035	1.025	0.988	1.061	2021	1.009	1.008	0.979	0.94	0.915
2013	0.922	1.013	0.985	0.986	1.128	2022	1.062	1.013	0.976	0.952	1

由时间序列长度 $n = 18$ ，再根据式 (3) 可求出极比值范围左右界，如式 (19) 所示。

$$\begin{cases} e^{-\frac{2}{n+1}} = 0.90 \\ e^{\frac{2}{n+1}} = 1.11 \end{cases} \quad (20)$$

确定好极比值上下界之后，为确定数据是否符合极比值范围，绘制如图 3 所示的不同学段各年份的极比值折线图。

通过观察图 3 中 2006 到 2022 年间各学段极比值发现，小学学段极比值均在式 (19) 之内，幼儿园，初中，普高，职高数据均出现游离在极比值界限外的数据点。因此，分别对上述学院的数据值进行平移，平移常数值的大小如表 3 所示。

表 3 幼儿园、初中、普高、职高学段数据平移常数

幼儿园	初中	高中	
		普高	职高
+216	+298	+143	+84

平移数据后再次进行极比值更新，更新后的极比值如表 4 所示。

数据经过标准化处理之后，我们通过 $GM(1, 1)$ 模型确定好各个学段的发展系数 a 与灰色作用量 b ，如表 5 所示。

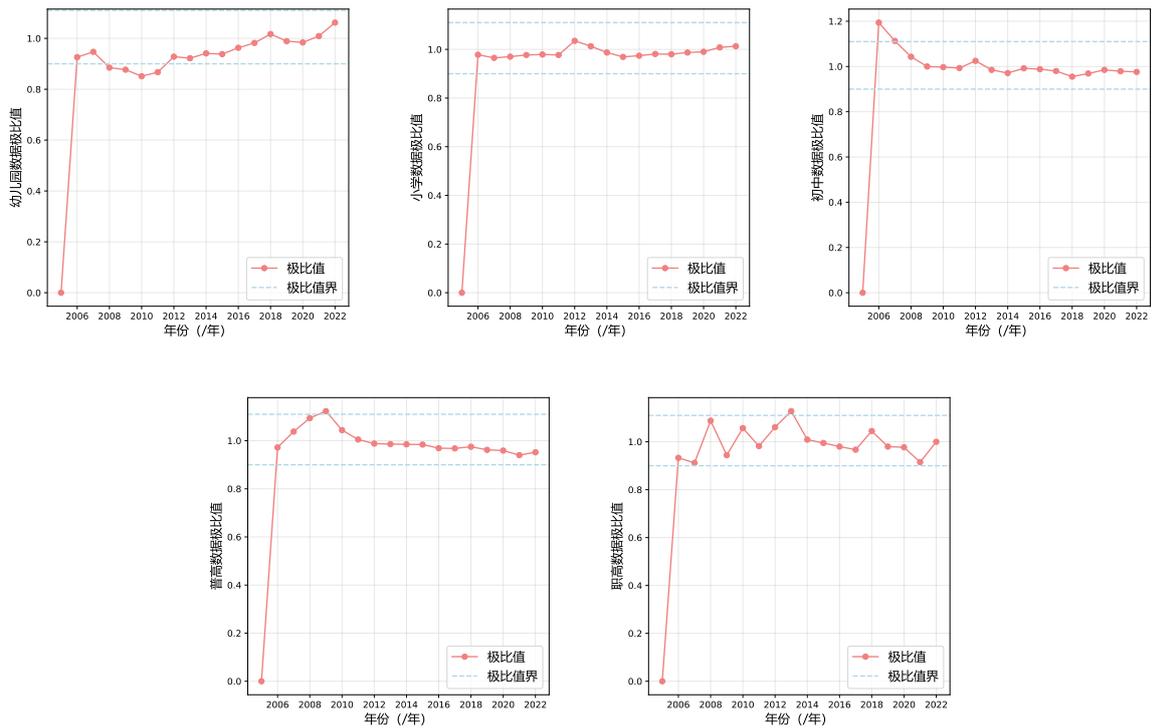


图3 2005-2022年间湖南省各学段极比值范围。2005年为起始数据，无极比值，图中以0代替。

表4 2005-2022年间湖南省各学段数据平移后标准极比值。加粗部分为未进行数据平移的极比值，其余为平移后极比值。

年份	幼儿园	小学	初中	高中		年份	幼儿园	小学	初中	高中	
				普高	职高					普高	职高
2005	-	-	-	-	-	2014	0.973	0.987	0.988	0.994	1.004
2006	0.979	0.978	1.088	0.986	0.968	2015	0.97	0.969	0.997	0.993	0.998
2007	0.985	0.965	1.049	1.018	0.956	2016	0.982	0.974	0.995	0.986	0.991
2008	0.964	0.97	1.018	1.043	1.042	2017	0.991	0.981	0.991	0.986	0.985
2009	0.958	0.977	1	1.053	0.973	2018	1.008	0.98	0.98	0.989	1.02
2010	0.944	0.979	0.999	1.018	1.027	2019	0.995	0.987	0.986	0.983	0.991
2011	0.945	0.977	0.997	1.002	0.991	2020	0.992	0.99	0.993	0.981	0.99
2012	0.969	1.035	1.01	0.995	1.028	2021	1.004	1.008	0.99	0.971	0.96
2013	0.965	1.013	0.994	0.994	1.056	2022	1.03	1.013	0.989	0.976	1

表 5 在校人数预测问题中灰色模型参数

系数	幼儿园	小学	初中	高中	
				普高	职高
发展系数 a	-0.022	-0.012	-0.004	-0.003	0.004
灰色作用量 b	333.539	436.413	506.339	251.765	162.487

得到未知系数最优解后, 结合式 19 我们得到最终各学段时间响应方程, 如式 (21) 所示。

$$\begin{cases} L_1: \hat{x}^{(0)}(k+1) = (x^{(0)}(1) + 15160.86)(1 - e^{-0.022})e^{0.022k} \\ L_2: \hat{x}^{(0)}(k+1) = (x^{(0)}(1) + 36367.75)(1 - e^{-0.012})e^{0.012k} \\ L_3: \hat{x}^{(0)}(k+1) = (x^{(0)}(1) + 126584.75)(1 - e^{-0.004})e^{0.004k} \\ L_4: \hat{x}^{(0)}(k+1) = (x^{(0)}(1) + 83921.66)(1 - e^{-0.003})e^{0.003k} \\ L_5: \hat{x}^{(0)}(k+1) = (x^{(0)}(1) + 40621.75)(1 - e^{-0.004})e^{-0.004k} \end{cases} \quad (21)$$

其中 L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 分别表示幼儿园、小学、初中、普高、职高的时间响应方程, 只需将对应的初值代入到式中, 便可求出预测值。

将经过数据平移的值代入到式 (21) 中, 分别得到各学段 2005-2022 年间的拟合值与 2024-2035 年间的预测值, 如表 6 所示。

确定拟合值与预测值后, 为确保预测结果的准确率, 需要对建立的 $GM(1, 1)$ 模型进行如式 (21) 所示的残差检验与如式 (22) 所示的后验差比检验。

$$\varepsilon(k) = \frac{x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)}, k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (22)$$

$$\rho(k) = 1 - \left(\frac{1 - 0.5a}{1 + 0.5a} \right) \lambda(k), k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (23)$$

每一学段各自的 $GM(1, 1)$ 模型平均精度计算公式为式 (24)

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon(k), \rho = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \rho(k) \quad (24)$$

一般地, 如果 $\varepsilon \leq 0.2$, 则认为达到一般要求, $\varepsilon \leq 0.1$, 则达到较高要求。 $\rho \leq 0.35$ 说明模型精度较高, $\rho \leq 0.5$ 说明模型精度合格, $\rho \geq 0.65$ 说明模型精度不合格。

通过 2005-2022 年间的的数据, 以模型的拟合值作为输入, 真实值作为标签, 求得各学段模型的残差与后验差比如表 7 所示。

由表 7 可知, $GM(1, 1)$ 模型对于幼儿园、小学、初中学段的 2005-2022 年间在校人数拟合地较为良好, 无论是残差检验还是后验差比检验都体现出灰色模型优良的准确

表 6 2005-2035 年间湖南省各学段在校人数拟合值与预测值。

年份	幼儿园	小学	初中	高中		年份	幼儿园	小学	初中	高中	
				普高	职高					普高	职高
拟合值											
2005	82.17	419.83	297.26	131.85	70.67	2014	179.323	488.987	230.307	116.774	71.867
2006	112.332	444.128	212.071	110.075	77.451	2015	188.565	494.904	232.632	117.624	71.183
2007	120.069	449.502	214.316	110.903	76.742	2016	198.015	500.892	234.967	118.477	70.501
2008	127.98	454.941	216.571	111.734	76.036	2017	207.678	506.953	237.313	119.332	69.823
2009	136.069	460.446	218.835	112.567	75.334	2018	217.558	513.087	239.668	120.19	69.148
2010	144.339	466.018	221.109	113.403	74.634	2019	227.659	519.296	242.034	121.051	68.476
2011	152.796	471.657	223.394	114.242	73.938	2020	237.988	525.58	244.411	121.915	67.806
2012	161.442	477.364	225.688	115.083	73.245	2021	248.549	531.939	246.798	122.781	67.14
2013	170.283	483.14	227.993	115.927	72.554	2022	259.347	538.376	249.195	123.651	66.476
预测值											
2024	281.677	551.484	254.022	125.398	65.158	2030	354.94	592.754	268.758	130.709	61.272
2025	293.219	558.157	256.451	126.276	64.503	2031	368.129	599.926	271.252	131.605	60.634
2026	305.021	564.911	258.891	127.157	63.851	2032	381.614	607.186	273.757	132.503	59.999
2027	317.088	571.747	261.341	128.041	63.202	2033	395.402	614.533	276.273	133.404	59.367
2028	329.426	578.665	263.803	128.927	62.556	2034	409.500	621.969	278.800	134.308	58.738
2029	342.041	585.667	266.275	129.817	61.913	2035	423.915	629.495	281.339	135.216	58.111

表 7 2005-2022 年拟合数据模型精度。加粗部分为不合格部分。

精度	幼儿园	小学	初中	高中	
				普高	职高
残差 (ε)	0.10921	0.01758	0.04095	0.08582	0.0538
后验差比 (ρ)	0.144	0.09	0.3	0.839	0.681

率，但对于普高与职高学段的预测，后验差比值过高，说明模型的拟合能力有欠缺。因此，下面绘制出如图 4 所示的拟合图像来观察拟合曲线与数据分布规律。

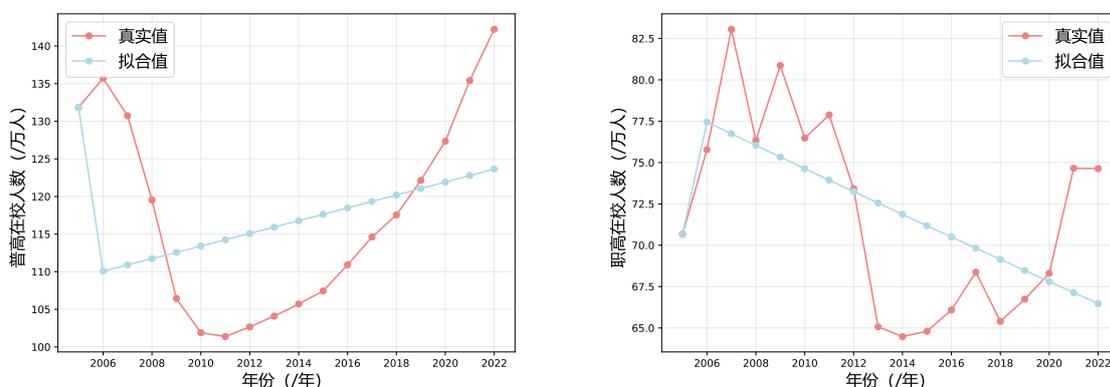


图 4 2005-2022 年间普高与职高学段灰色模型拟合曲线

通过观察拟合曲线与图 1 的数据样本分布规律可知，普高与职高拟合效果欠佳的原因主要是在 2005-2022 的时间段内特征值发生剧烈变化。湖南省普高在校人数从 2005-2011 年间呈整体下降趋势，2006-2022 年间整体呈上升趋势。湖南省职高在校人数从 2005-2014 年间呈整体下降趋势，2014-2022 年间整体呈上升趋势。由于两学段的数据变化规律在 2005-2022 年间发生重大转折。因此，为了更好体现出未来 2024-2035 年的在校人数变化趋势，对于普高在校人数，我们使用 2011-2022 年间的数据进行预测，对于职高在校人数，我们使用 2014-2022 年间的数据进行预测。

重新选取数据后，我们拟合出的普高在校人数与职高在校人数的参数 a 与 b 如表 8 所示。

表 8 调整后普高灰色模型参数与职高灰色模型参数

系数	普高	职高
发展系数 a	-0.034	-0.02
灰色作用量 b	93.517	62.027

更新后的时间响应方程如式 (25) 所示，模型精度如所示。

$$\begin{cases} L_4: \hat{x}^{(0)}(k+1) = (x^{(0)}(1) + 2750.50)(1 - e^{-0.034})e^{0.0034k} \\ L_5: \hat{x}^{(0)}(k+1) = (x^{(0)}(1) + 3101.35)(1 - e^{-0.02})e^{0.02k} \end{cases} \quad (25)$$

通过表 9 可以发现，经过修正后的模型精度达到要求，拟合效果良好。

图 5 展示的是 2005-2035 年湖南省幼儿园、小学、初中、高中各学段拟合与预测曲线，其中高中部分数据为普高与职高数据的总和。

表 9 2005-2022 年拟合数据模型精度。加粗部分为重新拟合的普高与职高模型精度。

精度	幼儿园	小学	初中	高中	
				普高	职高
残差 (ε)	0.10921	0.01758	0.04095	0.01803	0.02364
后验差比 (ρ)	0.144	0.09	0.3	0.037	0.25

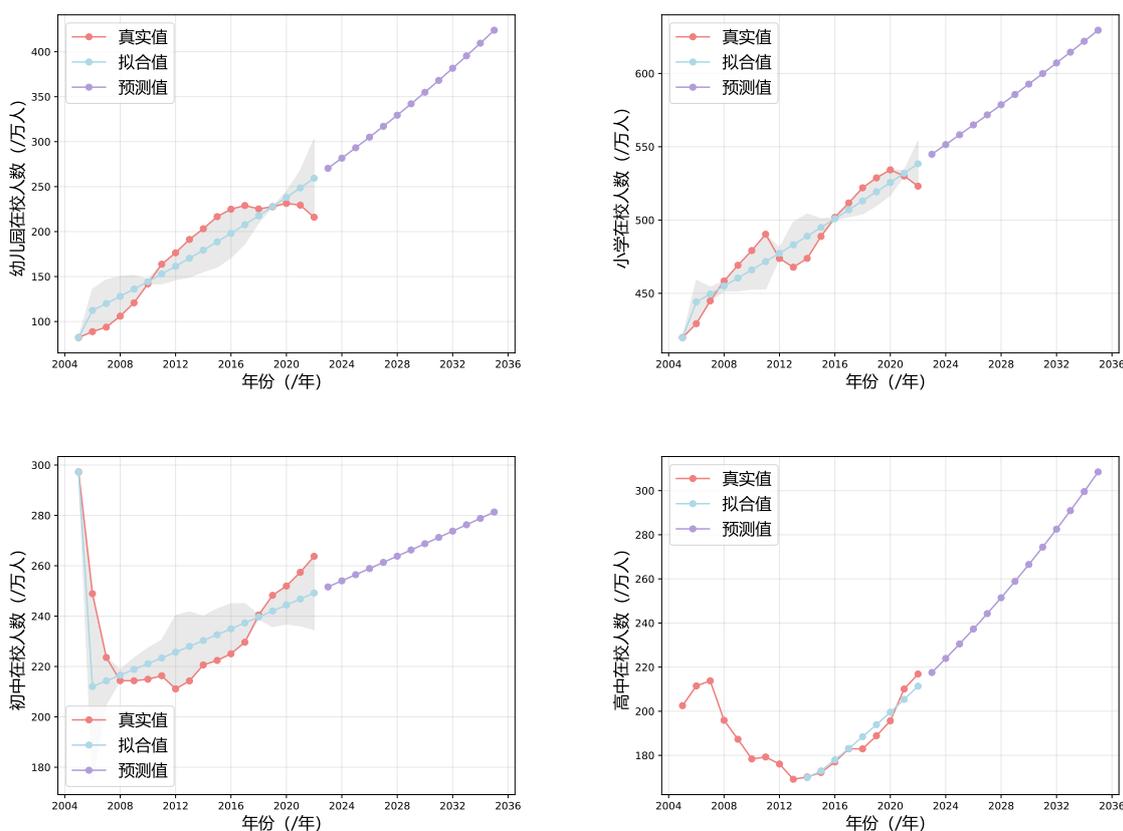


图 5 2005-2035 年湖南省各学段灰色模型拟合与预测曲线。灰色部分为拟合误差范围。

最终的各学段 2024-2035 年间在校人数预测结果如表 10 所示。

5.2 问题二模型的建立与求解

对于幼儿园，首先根据 2024-2035 年间预测出的湖南省幼儿园在校人数，参考《幼儿园教职工配备标准（暂行）》，确定 2045-2035 年间湖南省幼儿园教师需求量。对于小学、初中、高中学段，参考《关于统一城乡中小学教职工编制标准的通知》中关于小学、初中、高中确定的教职工与学生比例，推算出教职工需求量，再根据《关于制定中小学教职工编制标准意见的通知》有关信息确定专任教师的总量。最后使用当年教师总量减

表 10 2024-2035 年间湖南省各学段在校人数最终预测值

年份	幼儿园	小学	初中	高中	年份	幼儿园	小学	初中	高中
2024	281.677	551.484	254.022	223.928	2030	354.94	592.754	268.758	266.518
2025	293.219	558.157	256.451	230.497	2031	368.129	599.926	271.252	274.405
2026	305.021	564.911	258.891	237.270	2032	381.614	607.186	273.757	282.537
2027	317.088	571.747	261.341	244.251	2033	395.402	614.533	276.273	290.922
2028	329.426	578.665	263.803	251.447	2034	409.500	621.969	278.800	299.567
2029	342.041	585.667	266.275	258.867	2035	423.915	629.495	281.339	308.483

去上一年教师总量即为需求总量。

5.2.1 教职工需求量

根据中央编办、教育部、财政部联合引发的《关于统一城乡中小学教职工编制标准的通知》(中央编办发[2014]72号)提出的统一教职工编制制定, 县镇、农村等地的中小学教职工编制标准统一到城市标准, 具体标准如表 11 所示。

表 11 小学、初中、高中教职工编制标准

小学	初中	高中
1: 19	1: 13.5	1: 12.5

为推算小学、初中、高中教职工需求量, 可得到式 (26)。

$$T_i(j) = w_1(j) \times S_i(j), j \in \{b, c, d\} \quad (26)$$

其中 b 表示小学续断, c 表示初中学段, d 表示高中学段。通过表 10 在 2024-2035 年期间小学、初中、高中学段的预测在校人数与表 11 的教职工编制比例数据, 我们可以求得对应年份的教职工总量, 如表 12 所示。

5.2.2 专任教师需求量

Step1: 幼儿园教师总量 根据《幼儿园教职工配备标准(暂行)》, 幼儿园全园教职工与幼儿比为 1: 5 到 1: 7 之间, 本文按照 1: 6 计算, 结合表 10 的幼儿园学段与式在校

表 12 2024-2035 年间湖南省各小学、初中、高中教职工总数 (单位: 万人)

年份	小学	初中	高中	年份	小学	初中	高中
2024	29.0254	18.8164	17.9142	2030	31.1975	19.9080	21.3214
2025	29.3766	18.9963	18.4397	2031	31.5750	20.0927	21.9524
2026	29.7321	19.1771	18.9816	2032	31.9571	20.2782	22.6029
2027	30.0919	19.3585	19.5400	2033	32.3438	20.4646	23.2737
2028	30.4560	19.5409	20.1157	2034	32.7352	20.6518	23.9653
2029	30.8245	19.7240	20.7093	2035	33.1313	20.8399	24.6786

人数预测数据即可推算出 2024-2035 年间幼儿园教师需求总量, 如表 13 所示。

$$T_i^1(a) = w_2(a) \times S_i(a) \quad (27)$$

表 13 2024-2035 年间湖南省幼儿园教师需求总数 (单位: 万人)

2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	2032	2033	2034	2035
46.9461	48.8698	50.8368	52.8480	54.9043	57.0068	59.1566	61.3548	63.6023	65.9003	68.2500	70.6525

Step2: 其他学段教师总量 参考《关于制定中小学教职工编制标准意见的通知》, 配备职员、教学辅助人员和工勤人员的, 占教职工的比例, 小学不超过 9%、初中不超过 15%、高中不超过 16%, 因此分别得到小学、初中、高中教师占教职工编制的比例如表 14 所示。

表 14 小学、初中、高中教师占教职工编制标准比例

小学	初中	高中
0.91	0.85	0.84

可通过式 (28), 结合表 12 求出 2024-2035 年间小学、初中、高中教师总量, 合并表 13 的数据, 可得到表 15 的最终结果。

$$T_i^1(j) = w_3(j) \times T_i(j) = w_3(j) \times w_1(j) \times S_i(j), j \in \{b, c, d\} \quad (28)$$

表 15 2024-2035 年间湖南省各学段教师总量 (单位: 万人)

年份	幼儿园	小学	初中	高中	年份	幼儿园	小学	初中	高中
2024	46.9461	26.4131	15.9939	15.0479	2030	59.1566	28.3897	16.9218	17.9099
2025	48.8698	26.7327	16.1468	15.4893	2031	61.3548	28.733	17.0787	18.4400
2026	50.8368	27.0562	16.3005	15.9445	2032	63.6023	29.0809	17.2364	18.9864
2027	52.8480	27.3836	16.4547	16.4136	2033	65.9003	29.4328	17.3949	19.5499
2028	54.9043	27.7140	16.6097	16.8971	2034	68.2500	29.7890	17.5540	20.1308
2029	57.0068	28.0502	16.7654	17.3958	2035	70.6525	30.1494	17.7139	20.7300

Step3: 各学段教师总需求量 表 15 已经给出 2024 年-2035 年的各学段教师总数, 计算教师需求总数的公式如式 (29) 所示, 只需使用当年的教师总数减去前一年教师总数, 即可得到当年的教师需求总量, 最终结果如表 16 所示。

$$T_i^2(j) = T_i^1(j) - T_{i-1}^1(j), j \in \{a, b, c, d\} \quad (29)$$

表 16 2024-2035 年间湖南省各学段教师需求总量 (单位: 万人)

年份	幼儿园	小学	初中	高中	年份	幼儿园	小学	初中	高中
2024	1.8815	0.3157	0.1523	2.1049	2030	2.1498	0.3395	0.1564	0.5140
2025	1.9237	0.3196	0.1528	0.4414	2031	2.1982	0.3432	0.1569	0.5301
2026	1.9670	0.3234	0.1537	0.4552	2032	2.2475	0.3478	0.1576	0.5463
2027	2.0112	0.3274	0.1541	0.4690	2033	2.2980	0.3519	0.1585	0.5635
2028	2.0563	0.3303	0.1550	0.4834	2034	2.3497	0.3562	0.1590	0.5809
2029	2.1025	0.3362	0.1557	0.4987	2035	2.4025	0.3603	0.1599	0.5992

5.3 问题三模型的建立与求解

要测算出 2024-2035 年间湖南省各学段需新增教师数, 还需对每年的退休减员数与师范生毕业人数分别进行测算。对于退休减员数, 依据题给附件整理出 2022 年各学段男女教师的年龄分布情况, 每过一年年龄逐渐递增, 依次测算出每年退休的教师数。对

于师范生毕业人数，首先根据题给数据整理出定向师范生与非定向师范生 2020-2023 年间每年的毕业人数，结合 2021-2023 年间在校人数增长率确定师范院校在校生中大四学生所占比例，分别求出 2020-2023 年间公费定向与非公费定向师范生的毕业人数，再使用灰色模型对未来数据进行预测，从而求出 2024-2035 年师范生毕业总人数，最后使用教师需求量加上退休减员数，再减去师范生毕业数，即为每年的新增教师量。

5.3.1 推算 2024-2035 年间退休减员数

题给数据《2022 年幼儿园专任教师年龄、职称情况》与《2022 年中小学专任教师专业技术职务、年龄结构情况（总计）》中涵盖了 2022 年各个学段各年龄阶段的教师数量，假设年龄区间段内的教师数量成均匀分布，可以依次求出 2022 年湖南省各学段各个年龄阶段的教师数量。

使用 i 年减去 2022 年，加上教师在 2022 年时的年龄，即可得到教师在 i 年的年龄。根据国家相关规定，男教师退休年龄为 60 岁，女教师退休年龄为 50 岁，故男教师若在 i 年达到 60 岁即退休，女教师达到 55 岁即退休。故求 i 年退休人数的方式分别如式 (30) (31) 所示。

$$D(T_i^1(j)) = T_j^1(60 - (i - 2022)), j \in \{a, b, c, d\} \quad (30)$$

$$D(T_i^1(j)) = T_j^1(60 - (i - 2022)), j \in \{a, b, c, d\} \quad (31)$$

其中 $T_j^1(k)$ 表示 2022 年年龄为 k 的教师人数， j 表示不同学段。测算得到 2024-2035 年间每年的退休减员人数如表 17 所示。

5.3.2 推算 2024-2035 年间师范生毕业人数

根据题给数据《2020-2023 年全省普通高校师范生在校生情况统计表》可知 2020-2023 年间湖南全省师范生 2020-2023 年的在校人数，由于本科与专科学制不同，为方便确定毕业生人数，将数据划分为本科师范生与专科师范生两种不同学制，每种学制又包含公费定向师范生与非公费定向师范生。反应数据分布的

Step1: 计算平均增长率 为确定毕业生人数，即最高年级在整体在校生中的占比，我们通过式 (32) 计算 2021-2023 年间每一年的在校人数增长率，然后求得平均增长率，如表 18 所示。

$$R(i) = \frac{S(i) - S(i-1)}{S(i-1)} \quad (32)$$

其中 $R(i)$ 表式 i 年在校生增长率， $S(i)$ 表示 i 年在校生人数。

表 17 2024-2035 年湖南省各学段男女教师退休减员人数 (单位: 万人)

年份	幼儿园			小学			初中			高中		
	男	女	总计									
2024	0.0036	0.0362	0.0398	0.3628	0.3930	0.7558	0.2860	0.2390	0.5250	0.1979	0.1070	0.3049
2025	0.0036	0.0362	0.0398	0.3628	0.3930	0.7558	0.2860	0.2390	0.5250	0.1979	0.1070	0.3049
2026	0.0036	0.0362	0.0398	0.3628	0.3930	0.7558	0.2860	0.2390	0.5250	0.1979	0.1070	0.3049
2027	0.0036	0.0362	0.0398	0.3628	0.3930	0.7558	0.2860	0.2390	0.5250	0.1979	0.1070	0.3049
2028	0.0021	0.0684	0.0705	0.2407	0.4380	0.6787	0.2885	0.2863	0.5748	0.1801	0.1238	0.3039
2029	0.0021	0.0684	0.0705	0.2407	0.4380	0.6787	0.2885	0.2863	0.5748	0.1801	0.1238	0.3039
2030	0.0021	0.0684	0.0705	0.2407	0.4380	0.6787	0.2885	0.2863	0.5748	0.1801	0.1238	0.3039
2031	0.0021	0.0684	0.0705	0.2407	0.4380	0.6787	0.2885	0.2863	0.5748	0.1801	0.1238	0.3039
2032	0.0021	0.0684	0.0705	0.2407	0.4380	0.6787	0.2885	0.2863	0.5748	0.1801	0.1238	0.3039
2033	0.0028	0.1368	0.1396	0.2449	0.6167	0.8616	0.3104	0.2695	0.5799	0.1822	0.1254	0.3076
2034	0.0028	0.1368	0.1396	0.2449	0.6167	0.8616	0.3104	0.2695	0.5799	0.1822	0.1254	0.3076
2035	0.0028	0.1368	0.1396	0.2449	0.6167	0.8616	0.3104	0.2695	0.5799	0.1822	0.1254	0.3076

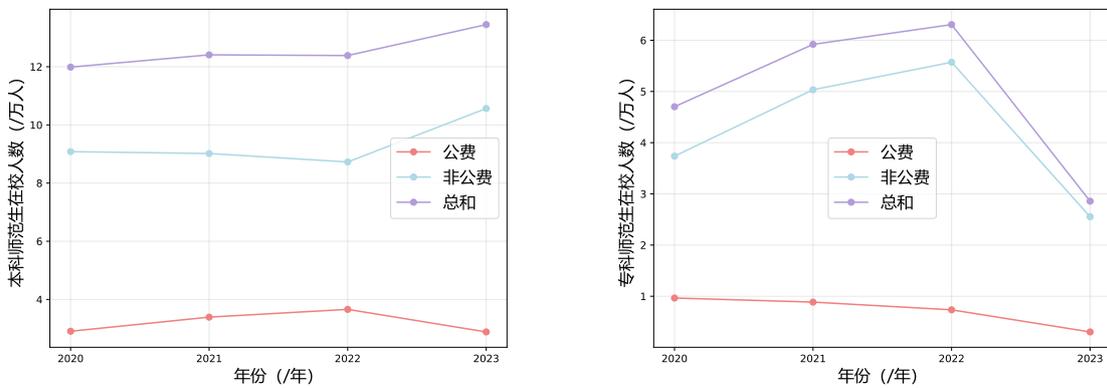


图 6 2020-2023 湖南省师范生在校人数分布

Step2: 计算毕业生人数 在校生总人数计算公式如式 (33) 所示。

$$S_{sum} = \sum_{i=1}^n S^i \quad (33)$$

其中 S_{sum} 表示在校生总人数, n 表示该学制所拥有的最高年限, 本科为四年, 专科为三年, S^i 表示年级为 i 的总人数。因此, 对本科生而言, S_{sum} 可写作式 (34)。

$$S_{sum} = (1 + E(R)_i)^3 S^4 + (1 + E(R)_i)^2 S^4 + (1 + E(R)_i) S^4 + S^4 = S^4 \sum_{j=0}^3 (1 + E(R)_i)^j \quad (34)$$

表 18 2021-2023 年湖南省师范生在校生人数增长率

年份	本科		专科	
	公费	非公费	公费	非公费
2021	16.71%	-0.71%	-8.24%	34.71%
2022	7.87%	-3.22%	-17.04%	10.67%
2023	-21.18%	21.06%	-58.68%	-54.16%
$E(R)$ (平均值)	1.13%	5.71%	-27.99%	-2.93%

可求得如式 (35) 所示的毕业生人数。

$$S^4 = \frac{S_{sum}}{\sum_{j=0}^3 (1 + E(R)_i)^j} \quad (35)$$

其中 $E(R)_i$ 表示平均增长率, i 可表示为本科公费定向师范生、本科非公费定向师范生。同上, 专科生的毕业生人数如式 (36) 所示

$$S^3 = \frac{S_{sum}}{\sum_{j=0}^2 (1 + E(R)_i)^j} \quad (36)$$

故本科与专科的毕业年级人数可通过式 (35) (36) 求得, 如表 19 所示。

表 19 2020-2023 年湖南省师范院校毕业生人数 (单位: 万人)

年份	本科		专科	
	公费	非公费	公费	非公费
2020	0.7143	2.0847	0.4313	0.3315
2021	0.8337	2.0699	0.3958	0.3041
2022	0.8993	2.0032	0.3283	0.2523
2023	0.7087	2.4253	0.1356	0.1042

得到的时间响应方程如式 (37) 所示。

$$\begin{cases} L_1: \hat{x}^{(0)}(k+1) = (x^{(0)}(1) - 13.1238)(1 - e^{0.073})e^{-0.073k} \\ L_2: \hat{x}^{(0)}(k+1) = (x^{(0)}(1) + 20.2588)(1 - e^{-0.085})e^{0.085k} \\ L_3: \hat{x}^{(0)}(k+1) = (x^{(0)}(1) - 16.4545)(1 - e^{0.099})e^{-0.099k} \\ L_3: \hat{x}^{(0)}(k+1) = (x^{(0)}(1) - 18.2835)(1 - e^{0.081})e^{-0.081k} \end{cases} \quad (37)$$

其中 L_1 , L_2 , L_3 , L_4 分别表示本科公费定向、本科非公费定向、专科公费定向、专科非公费定向师范生的时间序列相应方程。

预测结果如表 20 所示：

表 20 2024-2035 年湖南省师范生在校人数预测值

年份	本科		专科		总计	年份	本科		专科		总计
	公费	非公费	公费	非公费			公费	非公费	公费	非公费	
2024	0.702	2.560	0.05	0.035	3.347	2030	0.453	4.267	0	0	4.720
2025	0.653	2.787	0	0	3.440	2031	0.422	4.464	0	0	4.886
2026	0.607	3.035	0	0	3.642	2032	0.392	5.059	0	0	5.451
2027	0.564	3.305	0	0	3.869	2033	0.364	5.509	0	0	5.873
2028	0.525	3.599	0	0	4.124	2034	0.339	5.999	0	0	6.338
2029	0.488	3.919	0	0	4.407	2035	0.315	6.532	0	0	6.847

Step3: 分配毕业生学段去向 通过题给数据《2022 年中小学专任教师专业技术职务、年龄结构情况（总计）》与《幼儿园教职工数》可知，2022 年湖南省全省幼儿园共有 12.5382 万名教师、小学有 31.3275 万名教师、初中有 19.9076 万名教师、高中有 10.2263 万名教师，各学段共有 73.9978 万名教师。经计算，幼儿园、小学、初中、高中分别占到教师总体量的 16.94%、42.33%、26.90%、13.81%。

假设 2024-2035 年间的师范生毕业去向按上述比例进行分配，那么可得 2024-2035 年间各学段的师范生毕业人数，如表 21 所示。

5.3.3 推算 2024-2035 年间新增教师数

每年的新增教师数为教师需求总量与退休自然减员量之和减去当年毕业师范生数量，以上分学段的数据结果分别记录在表 16 17 21。汇总可得到表 22 的最终结果。

幼儿园、小学、初中、高中四学段需求总量、退休自然减员数、师范毕业生人数、新增教师数在 2024-2035 年间的变化趋势如图 7 所示。

5.4 问题四模型的建立与求解

先利用题给 2022 年的教师数据计算题目要求的各科目教师占当前学段的教师总数比例，用该比例乘以 7 的新增教师数，获得不考虑缺编状态自然状态下的各科目新增人数。接着分别用理想比例与实际比例乘以 2024-2035 年间预测的教师总量，得到理想情

表 21 2024-2035 年湖南省师范毕业生各学段去向 (单位: 万人)

年份	幼儿园	小学	初中	高中	年份	幼儿园	小学	初中	高中
2024	0.5669	1.4167	0.9003	0.4622	2030	0.7995	1.9979	1.2696	0.6518
2025	0.5827	1.4561	0.9253	0.4750	2031	0.8267	2.0682	1.3143	0.6747
2026	0.6169	1.5416	0.9796	0.5029	2032	0.9233	2.3074	1.4663	0.7527
2027	0.6554	1.6377	1.0407	0.5343	2033	0.9948	2.4860	1.5798	0.8110
2028	0.6986	1.7456	1.1093	0.5695	2034	1.0736	2.6828	1.7049	0.8752
2029	0.7465	1.8654	1.1854	0.6086	2035	1.1598	2.8983	1.8418	0.9455

表 22 2024-2035 年湖南省各学段新增教师数 (单位: 万人)。A 表示需求总量, B 表示退休自然减员数, C 表示师范毕业生人数, D 表示新增教师数。

年份	幼儿园				小学				初中				高中			
	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D
2024	1.8815	0.0398	0.5669	1.3544	0.3157	0.7558	1.4167	-0.3452	0.1523	0.5250	0.9003	-0.223	2.1049	0.3049	0.4622	1.9476
2025	1.9237	0.0398	0.5827	1.3808	0.3196	0.7558	1.4561	-0.3807	0.1528	0.5250	0.9253	-0.2475	0.4414	0.3049	0.4750	0.2713
2026	1.9670	0.0398	0.6169	1.3899	0.3234	0.7558	1.5416	-0.4624	0.1537	0.5250	0.9796	-0.3009	0.4552	0.3049	0.5029	0.2572
2027	2.0112	0.0398	0.6554	1.3956	0.3274	0.7558	1.6377	-0.5545	0.1541	0.5250	1.0407	-0.3616	0.4690	0.3049	0.5343	0.2396
2028	2.0563	0.0705	0.6986	1.4282	0.3303	0.6787	1.7456	-0.7366	0.1550	0.5748	1.1093	-0.3795	0.4834	0.3049	0.5695	0.2188
2029	2.1025	0.0705	0.7465	1.4265	0.3362	0.6787	1.8654	-0.8505	0.1557	0.5748	1.1854	-0.4549	0.4987	0.3039	0.6086	0.1940
2030	2.1498	0.705	0.7995	1.4208	0.3395	0.6787	1.9979	-0.9797	0.1564	0.5748	1.2696	-0.5384	0.514	0.3039	0.6518	0.1661
2031	2.1982	0.0705	0.8276	1.4411	0.3432	0.6787	2.0682	-1.0463	0.1569	0.5748	1.3143	-0.5826	0.5301	0.3039	0.6747	0.1593
2032	2.2475	0.1396	0.9233	1.4638	0.3478	0.8616	2.3074	-1.098	0.1576	0.5799	1.4663	-0.7288	0.5463	0.3039	0.7527	0.0975
2033	2.298	0.1396	0.9948	1.4428	0.3519	0.8616	2.4860	-1.2725	0.1585	0.5799	1.5798	-0.8414	0.5635	0.3076	0.8110	0.0601
2034	2.3497	0.1396	1.0736	1.4157	0.3562	0.8616	2.6828	-1.4650	0.159	0.5799	1.7049	-0.966	0.5809	0.3076	0.8752	0.0133
2035	2.4025	0.1396	1.1598	1.3823	0.3603	0.8616	2.8983	-1.6764	0.1599	0.5799	1.8418	-1.1020	0.5992	0.3076	0.9455	-0.0387

况与现实情况的差额, 加上现实情况的新增教师数即得到考虑严重缺编情况的教师新增人数。

5.4.1 确定问题科目教师所占学段总数的现实情况比例

首先需要分别测算出小学科学、以及小学初中高中的信息技术、心理健康教育、体育、音乐、美术的现实情况比例, 通过查阅题给数据《小学分课程专任教师学历情况(总计)》、《初中分课程专任教师学历情况(总计)》、《普通高中分课程专任教师学历情况(总计)》, 能确定科学、信息技术、体育、音乐、美术的教师人数构成, 但确实“心

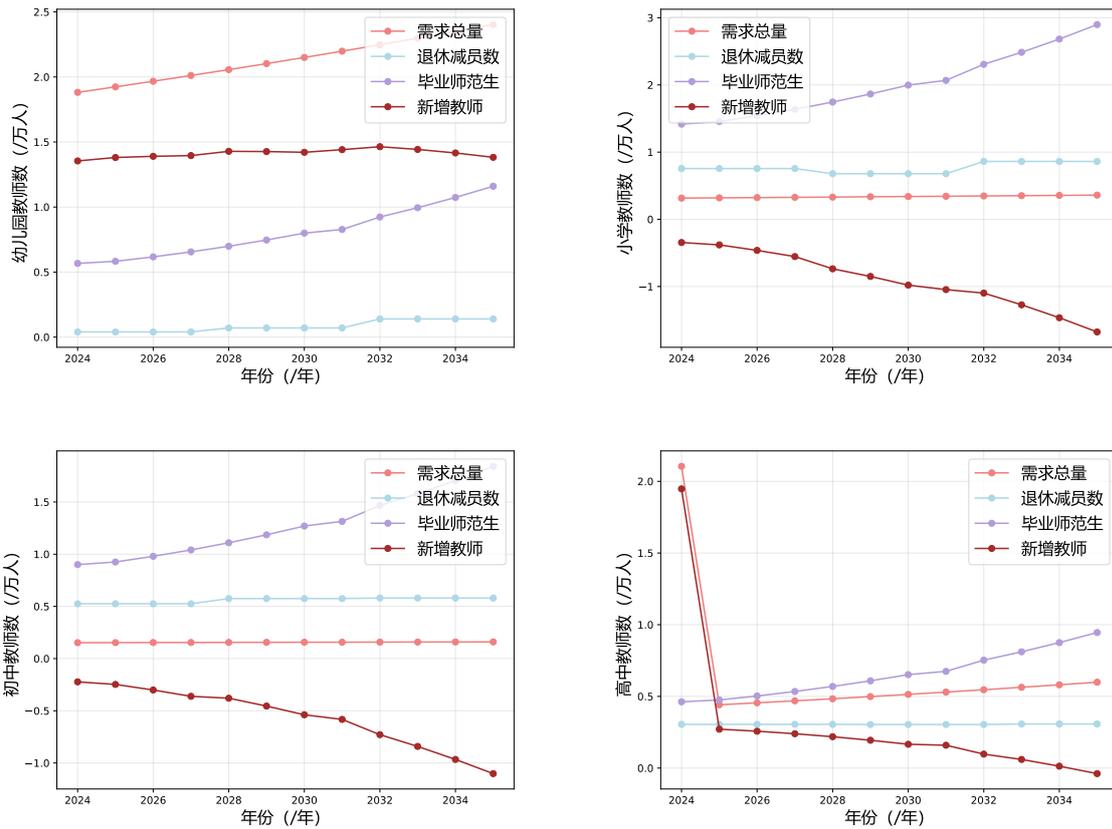


图 7 2024-2035 年湖南省各学段教师新增人数与总需求数、退休减员数、毕业师范生数变化关系

理健康教育”科目的教师数目，因此分成两部分进行测算。

Step1: 确定心理健康教育教师比例 通过查阅《湖南强力推进心理健康教育呵护学生成长成才》得知湖南省所有中小学有大约 2000 名专职心理健康教育教师，假设现实情况中心理健康教育教师在各学段分布的数量与各自学段拥有的教师数量成正比，可通过式 (38) 分别计算心理健康教育教师在各学段的占比。

$$R(T(psy)_j) = \frac{T_j \times \sum_j T(psy)}{\sum_j T_j} \quad (38)$$

其中 $T(psy)_j$ 在 j 学段的心理健康教育教师人数， R 为其占比， T_j 表示 j 学段的教师总数， $\sum_j T_j$ 表示所有学段的教师人数总和， $\sum_j T(psy)$ 表示所有学段的心理健康教育教师人数总和。同时可以化简得到式 (39)。

$$R(T(psy)_j) = \frac{\sum_j T(psy)}{\sum_j T_j} \quad (39)$$

通过 39 可知，心理健康教育教师在各学段所占比例均为心理健康教育教师总数除以中小学各学段人数总和，通过带入 2022 年的现有教师总量计算可知具体比例为

0.0027，此为小学、初中、高中学段心理健康教育教师占所在学段教师总数的占比。

Step1: 确定其他科目教师比例 通过查阅题给数据《小学分课程专任教师学历情况（总计）》、《初中分课程专任教师学历情况（总计）》、《普通高中分课程专任教师学历情况（总计）》分别得到各学段的信息技术、体育、音乐、美术，以及小学科学教师在 2022 年的具体数量，可通过式 (40) 计算得到该科目所占当前学段的现实情况比例。

$$R(T(k)_j) = \frac{T(k)_j}{\sum_k T(k)_j} \quad (40)$$

其中 $T(k)_j$ 表示在 j 学段中 k 可的教师人数， $\sum_k T(k)_j$ 即为 j 学段教师人数总和。通过代入 2022 年湖南省各学段的教师人数数据，结合心理健康教育教师所占的比例，可得到表 23 的结果。

表 23 2022 年湖南省中小学各缺编科目占本学段教师总数占比

科目	科学（小学）	信息（小学）	信息（初中）	信息（高中）	心理（小学）	心理（初中）	心理（高中）	体育（小学）
比例	0.0374	0.0179	0.0207	0.0196	0.0027	0.0027	0.0027	0.0705
科目	体育（初中）	体育（高中）	音乐（小学）	音乐（初中）	音乐（高中）	美术（小学）	美术（初中）	美术（高中）
比例	0.0626	0.0506	0.0477	0.0332	0.243	0.0428	0.0293	0.0212

我们将 2022 年湖南省中小学各缺编科目占本学段教师总数占比作为当前湖南省中小学的教师基本组成结构，再不考虑上述科目缺编的情况下，每年新增教师依然保持此结构。

5.4.2 确定问题科目教师所占学段总数的理想情况比例

有题意可知，表 23 中的教师组成结构存在严重缺编的现象，因此，在测算各缺编科目新增教师数时仅从表 23 的结果进行计算是不够的。故通过查阅相关资料，分别以小学初中的学时、高中的学分占比作为参考依据，但《义务教育课程方案》与《普通高中课程方案（2017 年版 2020 年修订）》均未有心理健康教育课程信息，因此心理健康教育教师理想标准单独考量。

Step1: 确定心理健康教育教师理想比例 通过查阅《湖南强力推进心理健康教育呵护学生成长成才》可知，湖南省各中小学理想的心理健康教育教师配备师生比为 1:1000，结合 2022 年各学段在校生人数与教师总量，可通过式 (41) 计算出各学段心理健康教育教师在各学段的理想占比。

$$R_I(T(psy)_j) = \frac{S(j)}{1000} \times \frac{1}{\sum_k T(k)_j} \quad (41)$$

其中 $R_I(T(psy)_j)$ 表示 j 学段的心理健康教育教师数量的理想占比, $S(j)$ 表示 j 学段学生总数。通过计算得到小学、初中、高中的心理健康教育教师数量的理想占比分别为 0.0164、0.0125、0.0139。

Step2: 确定其他科目教师理想比例 为确定上述科目教师的理想配置, 我们首先查阅教育部制定的 2022 年《义务教育课程方案》中, 小学与初中各学科的学时, 依据各学科学时所占总学时的比例确定为该们学科的教师人数应占学段比例的理想情况。然后通过查阅教育部制定的《普通高中课程方案(2017 年版 2020 年修订)》获取高中各学科学分标准, 因为学风能够衡量改门学科在高中教育阶段的重要程度, 与排课率、排课数量等指标成正比, 在理想情况下也会与任课教师数量以及任课教师数量所占学段总数的比例成正比。

根据《义务教育课程方案》中给出数据, 在建议课时安排百分比中取平均值, 得到小学与初中学段的理想值如表 24 所示。

表 24 湖南省小学初中教师缺编科目教师总量理想占比(除心理健康教育)

科目	科学	信息技术(小学)	信息技术(初中)	体育(小学)	体育(初中)	音乐(小学)	音乐(初中)	美术(小学)	美术(初中)
比例	0.09	0.015	0.015	0.1050	0.1050	0.0475	0.0475	0.0475	0.0475

根据《普通高中课程方案(2017 年版 2020 年修订)》中给出数据, 信息技术、体育、音乐、美术必修学分分别为 6、12、3、3, 而总学分为 88, 故以上科目在高中学段具体占比如表所示

表 25 湖南省高中教师缺编科目教师总量理想占比(除心理健康教育)

科目	信息技术(高中)	体育(高中)	音乐(高中)	美术(高中)
比例	0.0341	0.1364	0.0341	0.0341

结合心理健康教育教师的理想占比, 可得到湖南省各中小学缺编学科教师理想占比结果, 如表 26。

表 26 湖南省中小学各缺编科目占本学段教师总数理想占比

科目	科学(小学)	信息(小学)	信息(初中)	信息(高中)	心理(小学)	心理(初中)	心理(高中)	体育(小学)
比例	0.0900	0.0150	0.0150	0.0341	0.0164	0.0125	0.0139	0.1050
科目	体育(初中)	体育(高中)	音乐(小学)	音乐(初中)	音乐(高中)	美术(小学)	美术(初中)	美术(高中)
比例	0.1050	0.1364	0.0475	0.0475	0.0341	0.0475	0.0475	0.0341

为对比湖南省缺编科目教师占比的现实情况与理想情况，绘制出如图 8 所示的分组柱状图。

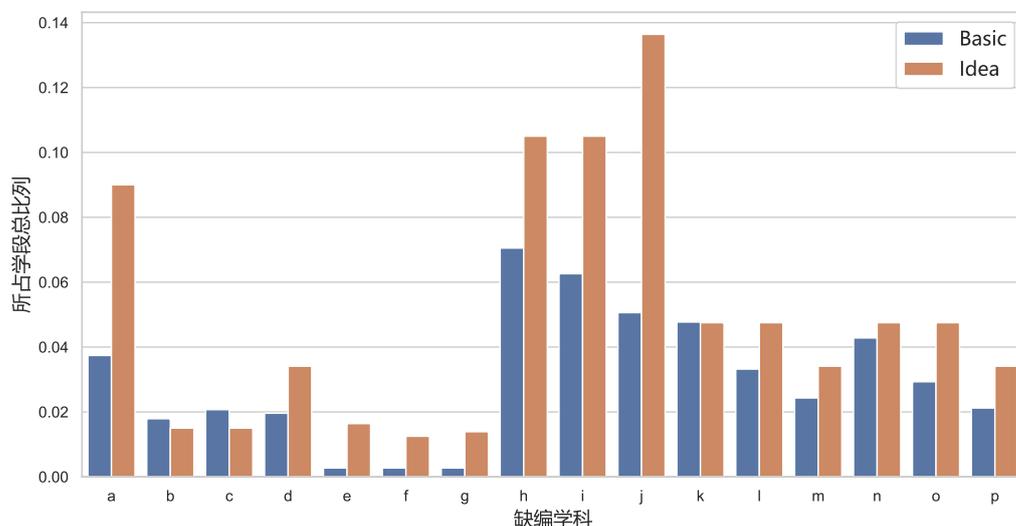


图 8 湖南省各缺编学科教师量实际占比与理想占比。蓝色 **Basic** 表示现实情况，棕色 **Idea** 表示理想情况。横坐标 a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p 分别表示缺编学科，顺序与表 26 中顺序一致

从图 8 中可以发现，题中的缺编科目教师现实情况与理想情况确实存在较大差距，在每年的新增教师数当中应该着重考虑，着重发展以上缺编科目教师队伍。

5.4.3 推算缺编科目教师新增人数

首先将各学段缺编教师的现实比例乘以问题三中求出得到的每年新增教师数，即可得到现实情况下缺编科目的新增教师数。但以上科目为缺编科目，现实情况下的师资结构已经出现不足，因此但考虑现实情况不足以匹配对应科目的合格师资配置，所以还应当计算出理想情况下的各学段各缺编科目教师总量，减去现实情况总量作为发展教师队伍的差额，也包括在新增人数之内。

Step1: 计算现实情况缺编新增教师数 要计算现实情况的各学段各缺编教师数，由于问题三已求出现实情况下的新增教师总数，只需以此各学段的总数乘以各学段对应缺编学科所占比例即可。结合表 23 与表 7 数据计算结果见附录表 27。

Step2: 计算现实情况与理想情况教师总数差额 表 15 可知 2034-2035 年间湖南省各学段教师总量，分别乘以缺编科目如表 23 的现实比例和如表 26 的理想比例，可分别得到现实各学段缺编科目的现实教师总量与理想教师总量，分别见附录表 29 与表 31。

将表与表所得结果作差即为现实情况与理想情况差额，再将差额与如表 27 所示的 2024-2035 年湖南省各学段缺编科目基础新增人数相加，即可得到最终的缺编科目在各学段的新增教师数量。结果见附录表 33。

六、模型的评价与推广

6.1 模型优点

- 比起神经网络等需要依靠大量稳定性高、周期性强的数据而言，灰色模型只需要少量数据便可进行拟合，并且抗干扰性强。
- 使用灰色模型对 2005-2022 年的历史数据进行预测时，及时进行模型精度检验，通过观察数据分布规律变化，对训练数据进行进一步的优化，大幅度提高模型的拟合精度。
- 在考虑师范院校毕业人数时，将师范毕业生分为本科学历与专科学历分开分别计算毕业人数后再使用灰色模型进一步预测，让预测结果更加精确。
- 在对科学、美术、体育等科目进行新增教师数预测时，考虑到各科目结构性缺编的重要事实现象，在直接预测现实条件新增教师数的同时，根据国家相关标准，对各缺编科目教师总数进行理想值预测，优化新增教师数结果。

6.2 模型缺点

- 灰色模型具有较强线性拟合能力，但对非线性数据拟合有所欠缺。
- 仅收集 2005-2022 年数据，毕业生数据仅为 2020-2023 年，数据样本总量小，难以总结规律。

6.3 模型推广

本模型不仅适用与教育事业人口发展，对于样本总量少、数据稳定性差的数据都可以使用，例如地区人口预测、出生人口预测、老龄化人口预测等。通过进一步改进之后可对各种小批量时序数据进行预测。

参考文献

- [1] Julong D. Introduction to grey system theory[J]. The Journal of grey system, 1989, 1(1): 1-24.
- [2] 梁钦. 基于灰色预测模型的老龄人口预测 [D]. 哈尔滨工业大学,2018.

- [3] 国务院办公厅转发中央编办、教育部、财政部关于制定中小学教职工编制标准意见的通知. 国办发（2001）74号
- [4] 湖南强力推进心理健康教育呵护学生成长成才. 中共湖南省委教育工作委员会. 湖南省教育厅. 教育工作情况专刊 [2021] 第 56 期
- [5] 普通高中课程方案（2017年版 2020年修订）. 中华人民共和国教育部.

附录 A 结果表格

表 27 2024-2035 年湖南省各学段缺编科目基础新增人数 (单位: 万人)

年份	科学		信息技术		心理健康与教育			体育
	小学	小学	初中	高中	小学	初中	高中	小学
2024	-0.0129	-0.0062	-0.0046	0.0382	-0.0009	-0.0006	0.0053	-0.0243
2025	-0.0142	-0.0068	-0.0051	0.0053	-0.0010	-0.0007	0.0007	-0.0268
2026	-0.0173	-0.0083	-0.0062	0.0050	-0.0012	-0.0008	0.0007	-0.0326
2027	-0.0207	-0.0099	-0.0075	0.0047	-0.0015	-0.0010	0.0006	-0.0391
2028	-0.0275	-0.0132	-0.0079	0.0043	-0.0020	-0.0010	0.0006	-0.0519
2029	-0.0318	-0.0152	-0.0094	0.0038	-0.0023	-0.0012	0.0005	-0.0600
2030	-0.0366	-0.0175	-0.0111	0.0033	-0.0026	-0.0015	0.0004	-0.0691
2031	-0.0391	-0.0187	-0.0121	0.0031	-0.0028	-0.0016	0.0004	-0.0738
2032	-0.0411	-0.0197	-0.0151	0.0019	-0.0030	-0.0020	0.0003	-0.0774
2033	-0.0476	-0.0228	-0.0174	0.0012	-0.0034	-0.0023	0.0002	-0.0897
2034	-0.0548	-0.0262	-0.0200	0.0003	-0.0040	-0.0026	0	-0.1033
2035	-0.0627	-0.0300	-0.0228	-0.0008	-0.0045	-0.0030	-0.0001	-0.1182

表 28 2024-2035 年湖南省各学段缺编科目基础新增人数 (单位: 万人) (续)

年份	体育			音乐			美术	
	初中	高中	小学	初中	高中	小学	初中	高中
2024	-0.0140	0.0985	-0.0165	-0.0074	0.0473	-0.0148	-0.0065	0.0413
2025	-0.0155	0.0137	-0.0182	-0.0082	0.0066	-0.0163	-0.0073	0.0058
2026	-0.0188	0.0130	-0.0221	-0.0100	0.0062	-0.0198	-0.0088	0.0055
2027	-0.0226	0.0121	-0.0264	-0.0120	0.0058	-0.0237	-0.0106	0.0051
2028	-0.0238	0.0111	-0.0351	-0.0126	0.0053	-0.0315	-0.0111	0.0046
2029	-0.0285	0.0098	-0.0406	-0.0151	0.0047	-0.0364	-0.0133	0.0041
2030	-0.0337	0.0084	-0.0467	-0.0179	0.0040	-0.0419	-0.0158	0.0035
2031	-0.0365	0.0081	-0.0499	-0.0193	0.0039	-0.0448	-0.0171	0.0034
2032	-0.0456	0.0049	-0.0524	-0.0242	0.0024	-0.0470	-0.0214	0.0021
2033	-0.0527	0.0030	-0.0607	-0.0279	0.0015	-0.0545	-0.0247	0.0013
2034	-0.0605	0.0007	-0.0699	-0.0321	0.0003	-0.0627	-0.0283	0.0003
2035	-0.0690	-0.002	-0.0800	-0.0366	-0.0009	-0.0717	-0.0323	-0.0008

表 29 2024-2035 年湖南省各学段缺编科目基础总量 (单位: 万人)

年份	科学		信息技术			心理健康与教育			体育
	小学	小学	初中	高中	小学	初中	高中	小学	
2024	0.9878	0.4728	0.3311	0.2949	0.0713	0.0432	0.0406	1.8621	
2025	0.9998	0.4785	0.3342	0.3036	0.0722	0.0436	0.0418	1.8847	
2026	1.0119	0.4843	0.3374	0.3125	0.0731	0.0440	0.0431	1.9075	
2027	1.0241	0.4902	0.3406	0.3217	0.0739	0.0444	0.0443	1.9305	
2028	1.0365	0.4961	0.3438	0.3312	0.0748	0.0448	0.0456	1.9538	
2029	1.0491	0.5021	0.3470	0.3410	0.0757	0.0453	0.0470	1.9775	
2030	1.0618	0.5082	0.3503	0.3510	0.0767	0.0457	0.0484	2.0015	
2031	1.0746	0.5143	0.3535	0.3614	0.0776	0.0461	0.0498	2.0257	
2032	1.0876	0.5205	0.3568	0.3721	0.0785	0.0465	0.0513	2.0502	
2033	1.1008	0.5268	0.3601	0.3832	0.0795	0.0470	0.0528	2.0750	
2034	1.1141	0.5332	0.3634	0.3946	0.0804	0.0474	0.0544	2.1001	
2035	1.1276	0.5397	0.3667	0.4063	0.0814	0.0478	0.0560	2.1255	

表 30 2024-2035 年湖南省各学段缺编科目基础总量 (单位: 万人) (续)

年份	体育			音乐			美术	
	初中	高中	小学	初中	高中	小学	初中	高中
2024	1.0012	0.7614	1.2599	0.5310	0.3657	1.1305	0.4686	0.3190
2025	1.0108	0.7838	1.2751	0.5361	0.3764	1.1442	0.4731	0.3284
2026	1.0204	0.8068	1.2906	0.5412	0.3875	1.1580	0.4776	0.3380
2027	1.0301	0.8305	1.3062	0.5463	0.3989	1.1720	0.4821	0.3480
2028	1.0398	0.8550	1.3220	0.5514	0.4106	1.1862	0.4867	0.3582
2029	1.0495	0.8802	1.3380	0.5566	0.4227	1.2005	0.4912	0.3688
2030	1.0593	0.9062	1.3542	0.5618	0.4352	1.2151	0.4958	0.3797
2031	1.0691	0.9331	1.3706	0.5670	0.4481	1.2298	0.5004	0.3909
2032	1.0790	0.9607	1.3872	0.5722	0.4614	1.2447	0.5050	0.4025
2033	1.0889	0.9892	1.4039	0.5775	0.4751	1.2597	0.5097	0.4145
2034	1.0989	1.0186	1.4209	0.5828	0.4892	1.2750	0.5143	0.4268
2035	1.1089	1.0489	1.4381	0.5881	0.5037	1.2904	0.5190	0.4395

表 31 2024-2035 年湖南省各学段缺编科目理想总量 (单位: 万人)

年份	科学		信息技术			心理健康与教育			体育
	小学	小学	初中	高中	小学	初中	高中	小学	
2024	2.3772	0.3962	0.2399	0.5131	0.4332	0.1999	0.2092	2.7734	
2025	2.4059	0.4010	0.2422	0.5282	0.4384	0.2018	0.2153	2.8069	
2026	2.4351	0.4058	0.2445	0.5437	0.4437	0.2038	0.2216	2.8409	
2027	2.4645	0.4108	0.2468	0.5597	0.4491	0.2057	0.2281	2.8753	
2028	2.4943	0.4157	0.2491	0.5762	0.4545	0.2076	0.2349	2.9100	
2029	2.5245	0.4208	0.2515	0.5932	0.4600	0.2096	0.2418	2.9453	
2030	2.5551	0.4258	0.2538	0.6107	0.4656	0.2115	0.2489	2.9809	
2031	2.5860	0.4310	0.2562	0.6288	0.4712	0.2135	0.2563	3.0170	
2032	2.6173	0.4362	0.2585	0.6474	0.4769	0.2155	0.2639	3.0535	
2033	2.6490	0.4415	0.2609	0.6667	0.4827	0.2174	0.2717	3.0904	
2034	2.6810	0.4468	0.2633	0.6865	0.4885	0.2194	0.2798	3.1278	
2035	2.7134	0.4522	0.2657	0.7069	0.4945	0.2214	0.2881	3.1657	

表 32 2024-2035 年湖南省各学段缺编科目理想总量 (单位: 万人) (续)

年份	体育			音乐			美术	
	初中	高中	小学	初中	高中	小学	初中	高中
2024	1.6794	2.0525	1.2546	0.7597	0.5131	1.2546	0.7597	0.5131
2025	1.6954	2.1127	1.2698	0.7670	0.5282	1.2698	0.7670	0.5282
2026	1.7116	2.1748	1.2852	0.7743	0.5437	1.2852	0.7743	0.5437
2027	1.7277	2.2388	1.3007	0.7816	0.5597	1.3007	0.7816	0.5597
2028	1.7440	2.3048	1.3164	0.7890	0.5762	1.3164	0.7890	0.5762
2029	1.7604	2.3728	1.3324	0.7964	0.5932	1.3324	0.7964	0.5932
2030	1.7768	2.4429	1.3485	0.8038	0.6107	1.3485	0.8038	0.6107
2031	1.7933	2.5152	1.3648	0.8112	0.6288	1.3648	0.8112	0.6288
2032	1.8098	2.5897	1.3813	0.8187	0.6474	1.3813	0.8187	0.6474
2033	1.8265	2.6666	1.3981	0.8263	0.6667	1.3981	0.8263	0.6667
2034	1.8432	2.7458	1.4150	0.8338	0.6865	1.4150	0.8338	0.6865
2035	1.8600	2.8276	1.4321	0.8414	0.7069	1.4321	0.8414	0.7069

表 33 2024-2035 年湖南省各学段缺编科目新增总人数（单位：万人）

年份	科学		信息技术		心理健康与教育			体育
	小学	小学	初中	高中	小学	初中	高中	小学
2024	1.3894	-0.0766	-0.0912	0.2182	0.3619	0.1567	0.1386	0.9113
2025	1.4061	-0.0775	-0.0920	0.2246	0.3662	0.1582	0.1735	0.9222
2026	1.4232	-0.0785	-0.0929	0.2312	0.3706	0.1598	0.1785	0.9334
2027	1.4404	-0.0794	-0.0938	0.2380	0.3752	0.1613	0.1838	0.9448
2028	1.4578	-0.0804	-0.0947	0.2450	0.3797	0.1628	0.1893	0.9562
2029	1.4754	-0.0813	-0.0955	0.2522	0.3843	0.1643	0.1948	0.9678
2030	1.4933	-0.0824	-0.0965	0.2597	0.3889	0.1658	0.2005	0.9794
2031	1.5114	-0.0833	-0.0973	0.2674	0.3936	0.1674	0.2065	0.9913
2032	1.5297	-0.0843	-0.0983	0.2753	0.3984	0.1690	0.2126	1.0033
2033	1.5482	-0.0853	-0.0992	0.2835	0.4032	0.1704	0.2189	1.0154
2034	1.5669	-0.0864	-0.1001	0.2919	0.4081	0.1720	0.2254	1.0277
2035	1.5858	-0.0875	-0.1010	0.3006	0.4131	0.1736	0.2321	1.0402

表 34 2024-2035 年湖南省各学段缺编科目新增总人数（单位：万人）（续）

年份	体育			音乐			美术	
	初中	高中	小学	初中	高中	小学	初中	高中
2024	0.6782	1.2911	-0.0053	0.2287	0.1474	0.1241	0.2911	0.1941
2025	0.6846	1.3289	-0.0053	0.2309	0.1518	0.1256	0.2939	0.1998
2026	0.6912	1.3680	-0.0054	0.2331	0.1562	0.1272	0.2967	0.2057
2027	0.6976	1.4083	-0.0055	0.2353	0.1608	0.1287	0.2995	0.2117
2028	0.7042	1.4498	-0.0056	0.2376	0.1656	0.1302	0.3023	0.2180
2029	0.7109	1.4926	-0.0056	0.2398	0.1705	0.1319	0.3052	0.2244
2030	0.7175	1.5367	-0.0057	0.2420	0.1755	0.1334	0.3080	0.2310
2031	0.7242	1.5821	-0.0058	0.2442	0.1807	0.1350	0.3108	0.2379
2032	0.7308	1.6290	-0.0059	0.2465	0.1860	0.1366	0.3137	0.2449
2033	0.7376	1.6774	-0.0058	0.2488	0.1916	0.1384	0.3166	0.2522
2034	0.7443	1.7272	-0.0059	0.2510	0.1973	0.1400	0.3195	0.2597
2035	0.7511	1.7787	-0.0060	0.2533	0.2032	0.1417	0.3224	0.2674

附录 B 源代码

2.1 问题一相关源代码

Q1-AOI 折线图.py

```
1 import pandas as pd
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from matplotlib.font_manager import FontProperties
4 from matplotlib.ticker import MaxNLocator
5
6 # 设置中文字体, 确保能够正确显示中文字符
7 font = FontProperties(family='Microsoft YaHei', size=12) # 替换为您的中文字体文件路径
8
9 # 从CSV文件读取数据
10 data = pd.read_csv('Q1.csv')
11
12 # 提取数据
13 x_values = data['Year'][10:]
14 y_values = data['a'][10:]
15
16 # 创建折线图
17 plt.figure(figsize=(8, 6)) # 设置图形大小
18
19 plt.plot(x_values, y_values, marker='o', linestyle='-', color='lightcoral', label='人数') #
    设置线型、标记和颜色
20
21 # plt.title('原始数据序列', fontproperties=font) # 设置标题, 使用中文字体
22 plt.xlabel('年份 (/年)', fontproperties=font) # 设置X轴标签, 使用中文字体
23 plt.ylabel('在校人数 (/万人)', fontproperties=font) # 设置Y轴标签, 使用中文字体
24 plt.legend(prop=font) # 显示图例, 使用中文字体
25 plt.grid(True, alpha=0.3) # 显示网格
26
27 plt.gca().xaxis.set_major_locator(MaxNLocator(integer=True))
28 plt.show() # 显示图形
```

Q1-sandan.py

```
1 import pandas as pd
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from matplotlib.font_manager import FontProperties
4 from matplotlib.ticker import MaxNLocator
5
6 # 设置中文字体, 确保能够正确显示中文字符
7 font = FontProperties(family='Microsoft YaHei', size=12) # 替换为您的中文字体文件路径
8
9 # 从CSV文件读取数据
```

```

10 data = pd.read_csv('Q1.csv')
11
12 # 提取数据
13 x_values = data['Year']
14 y_values = data['b']
15
16 # 创建折线图
17 plt.figure(figsize=(6, 6)) # 设置图形大小
18
19 plt.scatter(x_values, y_values, c='lightcoral', marker='o', label='数据点')
20
21 # plt.title('原始数据序列', fontproperties=font) # 设置标题, 使用中文字体
22 plt.xlabel('年份 (/年)', fontproperties=font) # 设置X轴标签, 使用中文字体
23 plt.ylabel('小学在校人数 (/万人)', fontproperties=font) # 设置Y轴标签, 使用中文字体
24 plt.legend(prop=font) # 显示图例, 使用中文字体
25 plt.grid(True, alpha=0.3) # 显示网格
26
27 # 设置横坐标刻度为整数
28 plt.gca().xaxis.set_major_locator(MaxNLocator(integer=True))
29
30 # plt.savefig('line_plot.png') # 保存图像为文件
31 plt.show() # 显示图形

```

Q1-初始拟合曲线.py

```

1 import pandas as pd
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from matplotlib.font_manager import FontProperties
4 from matplotlib.ticker import MaxNLocator
5
6 # 设置中文字体, 确保能够正确显示中文字符
7 font = FontProperties(family='Microsoft YaHei', size=16) # 替换为您的中文字体文件路径
8
9 # 从CSV文件读取数据
10 data = pd.read_csv('Q1-拟合结果/普高拟合结果1.csv')
11
12 # 提取数据
13 x_values = data['year']
14 y_values = data['a']
15 y_values1 = data['b']
16
17 # 创建折线图
18 plt.figure(figsize=(8, 6)) # 设置图形大小
19
20 plt.plot(x_values, y_values, marker='o', linestyle='-', color='lightcoral', label='真实值') #
    设置线型、标记和颜色
21 plt.plot(x_values, y_values1, marker='o', linestyle='-', color='lightblue', label='拟合值')

```

```

22
23 # plt.title('原始数据序列', fontproperties=font) # 设置标题, 使用中文字体
24 plt.xlabel('年份 (/年)', fontproperties=font) # 设置X轴标签, 使用中文字体
25 plt.ylabel('普高在校人数 (/万人)', fontproperties=font) # 设置Y轴标签, 使用中文字体
26 plt.legend(prop=font) # 显示图例, 使用中文字体
27 plt.grid(True, alpha=0.3) # 显示网格
28
29 plt.gca().xaxis.set_major_locator(MaxNLocator(integer=True))
30 plt.show() # 显示图形

```

Q1-最终拟合曲线.py

```

1 import pandas as pd
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from matplotlib.font_manager import FontProperties
4 from matplotlib.ticker import MaxNLocator
5 import numpy as np
6
7 # 设置中文字体, 确保能够正确显示中文字符
8 font = FontProperties(family='Microsoft YaHei', size=16) # 替换为您的中文字体文件路径
9
10 # 从CSV文件读取数据
11 data = pd.read_csv('Q1-拟合结果/初中拟合结果1.csv')
12 data_y = pd.read_csv('Q1-预测结果/初中预测结果1.csv')
13
14 # 提取数据
15 x_values = data['year']
16 y_values = data['a']
17 y_values1 = data['b']
18 x_values2 = data_y['year'] + 2022
19 y_values2 = data_y['a']
20
21 # 创建折线图
22 plt.figure(figsize=(8, 6)) # 设置图形大小
23
24 plt.plot(x_values, y_values, marker='o', linestyle='-', color='lightcoral', label='真实值') #
    设置线型、标记和颜色
25 plt.plot(x_values, y_values1, marker='o', linestyle='-', color='lightblue', label='拟合值')
26 plt.plot(x_values2, y_values2, marker='o', linestyle='-', color='#B19CD9', label='预测值') #
    设置线型、标记和颜色
27
28 plt.fill_between(x_values, y_values1 - np.abs(y_values - y_values1), y_values1 +
    np.abs(y_values - y_values1), color='lightgray', alpha=0.5)
29
30 # plt.title('原始数据序列', fontproperties=font) # 设置标题, 使用中文字体
31 plt.xlabel('年份 (/年)', fontproperties=font) # 设置X轴标签, 使用中文字体
32 plt.ylabel('初中在校人数 (/万人)', fontproperties=font) # 设置Y轴标签, 使用中文字体

```

```

33 plt.legend(prop=font) # 显示图例, 使用中文字体
34 plt.grid(True, alpha=0.3) # 显示网格
35
36 plt.gca().xaxis.set_major_locator(MaxNLocator(integer=True))
37 plt.show() # 显示图形

```

Q1-极比值折线图.py

```

1 import pandas as pd
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from matplotlib.font_manager import FontProperties
4 from matplotlib.ticker import MaxNLocator
5
6 # 设置中文字体, 确保能够正确显示中文字符
7 font = FontProperties(family='Microsoft YaHei', size=14) # 替换为您的中文字体文件路径
8
9 # 从CSV文件读取数据
10 data = pd.read_csv('Q1-极比值/幼儿园极比值1.csv')
11
12 # 提取数据
13 x_values = data['year']
14 y_values = data['b']
15
16 # 创建折线图
17 plt.figure(figsize=(6, 6)) # 设置图形大小
18
19 plt.plot(x_values, y_values, marker='o', linestyle='-', color='lightcoral', label='极比值')
20
21 # 添加两条常数直线
22 plt.axhline(y=0.90, color='lightblue', linestyle='--', label='极比值界')
23 plt.axhline(y=1.11, color='lightblue', linestyle='--')
24
25 # plt.title('原始数据序列', fontproperties=font) # 设置标题, 使用中文字体
26 plt.xlabel('年份 (/年)', fontproperties=font) # 设置X轴标签, 使用中文字体
27 plt.ylabel('幼儿园数据极比值', fontproperties=font) # 设置Y轴标签, 使用中文字体
28 plt.legend(prop=font) # 显示图例, 使用中文字体
29 plt.grid(True, alpha=0.3) # 显示网格
30 plt.gca().xaxis.set_major_locator(MaxNLocator(integer=True))
31 plt.show() # 显示图形

```

Q1-灰色模型.m

```

1 y=data(:,1);
2 n=length(y);
3 X0 = cumsum(y);
4 yy=ones(n,1);
5 yy(1)=y(1);

```

```

6  for i=2:n
7      yy(i)=yy(i-1)+y(i);
8  end
9  B=ones(n-1,2);
10 for i=1:(n-1)
11     B(i,1)=-(yy(i)+yy(i+1))/2;
12     B(i,2)=1;
13 end
14 BT=B';
15 for j=1:(n-1)
16     YN(j)=y(j+1);
17 end
18 YN=YN';
19 A=inv(BT*B)*BT*YN;
20 a=A(1);
21 u=A(2);
22 t=u/a;
23 t_test=input('输入需要预测的个数');
24 i=1:t_test+n;
25 yys(i+1)=(y(1)-t).*exp(-a.*i)+t;
26 yys(1)=y(1);
27 for j=n+t_test:-1:2
28     ys(j)=yys(j)-yys(j-1);
29 end
30 x=1:n;
31 xs=2:n+t_test;
32 yn=yys(2:n+t_test);
33 plot(x,y,'^r',xs,yn,'*-b');
34 det=0;
35 for i=2:n
36     det=det+abs(yn(i)-y(i));
37 end
38 det=det/(n-1);
39 disp(['百分绝对误差为: ',num2str(det),'%']);
40 disp(['预测值为: ',num2str(ys(n+1:n+t_test))]);
41 sum1=0;
42 sumpe=0;
43 for i=1:n
44     sumpe=sumpe+y(i);
45 end
46 pe=sumpe/n;
47 for i=1:n;
48     sum1=sum1+(y(i)-pe).^2;
49 end
50 s1=sqrt(sum1/n);
51 sumce=0;
52 for i=2:n

```

```

53     sumce=sumce+(y(i)-yn(i));
54 end
55 ce=sumce/(n-1);
56 sum2=0;
57 for i=2:n;
58     sum2=sum2+(y(i)-yn(i)-ce).^2;
59 end
60 s2=sqrt(sum2/(n-1));
61 c=(s2)/(s1);
62 disp(['后验差比值为: ',num2str(c)]);
63 if c<0.35
64     disp('系统预测精度好')
65 else if c<0.5
66     disp('系统预测精度合格')
67     else if c<0.65
68         disp('系统预测精度勉强')
69
70     else
71         disp('系统预测精度不合格')
72     end
73 end
74 end
75
76 disp(['下个拟合值为 ',num2str(ys(n+1))]);
77 disp(['再下个拟合值为',num2str(ys(n+2))]);
78 Bn = [-X0(1:n-1), ones(n-1,1)];
79 Yn = X0(2:n);
80 u = Bn\Yn;
81 a = u(1);
82 b = u(2);
83 disp(['发展系数 a: ', num2str(a)]);
84 disp(['灰色作用量 b: ', num2str(b)]);

```

2.2 问题二相关源代码

Q2-各学段教师总量总折线图.py

```

1 import pandas as pd
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from matplotlib.font_manager import FontProperties
4 from matplotlib.ticker import MaxNLocator
5 import numpy as np
6
7 # 设置中文字体，确保能够正确显示中文字符
8 font = FontProperties(family='Microsoft YaHei', size=16) # 替换为您的中文字体文件路径
9

```

```

10 # 从CSV文件读取数据
11 data = pd.read_csv('Q2-各学段教师需求总量.csv')
12
13 # 提取数据
14 x_values = data['year']
15
16
17 # 创建折线图
18 plt.figure(figsize=(8, 6)) # 设置图形大小
19
20 plt.plot(x_values, data['a'], marker='o', linestyle='-', color='lightcoral', label='幼儿园')
21 plt.plot(x_values, data['b'], marker='o', linestyle='-', color='lightblue', label='小学')
22 plt.plot(x_values, data['c'], marker='o', linestyle='-', color='#B19CD9', label='初中')
23 plt.plot(x_values, data['d'], marker='o', linestyle='-', color='lightgreen', label='高中')
24
25
26 # plt.title('原始数据序列', fontproperties=font) # 设置标题, 使用中文字体
27 plt.xlabel('年份 (/年)', fontproperties=font) # 设置X轴标签, 使用中文字体
28 plt.ylabel('教师需求总量 (/万人)', fontproperties=font) # 设置Y轴标签, 使用中文字体
29 plt.legend(prop=font) # 显示图例, 使用中文字体
30 plt.grid(True, alpha=0.3) # 显示网格
31
32 plt.gca().xaxis.set_major_locator(MaxNLocator(integer=True))
33 plt.show() # 显示图形

```

Q2-2024-2035 年退休减员数预测.m

```

1 year= input('请输入年份: ');
2 % 初始化两个变量用于存储相加结果
3 row_result1 = [];
4 row_result2 = [];
5 sum_result1 = 0;
6 sum_result2 = 0;
7 retirement_age1 = input('请输入男教师退休年龄: ');
8 retirement_age2 = input('请输入女教师退休年龄: ');
9 n = year - 2022;
10 % 遍历两个矩阵的第一列, 输出给定年份符合退休年龄的那一行数据
11 for i = 1:size(data1, 1)
12     if data1(i, 1) > retirement_age1 - (n+1) && data1(i, 1) < retirement_age1-(n-1)
13         row_result1 = data1(i, :)
14         sum_result1 = sum_result1 + sum(data1(i, :))-data1(i,1)
15     end
16 end
17 for i = 1:size(data2, 1)
18     if data2(i, 1) > retirement_age2 - (n+1) && data2(i, 1) < retirement_age2-(n-1)
19         row_result2 = data2(i, :)
20         sum_result2 = sum_result2 + sum(data2(i, :))-data2(i,1)

```

```

21     end
22 end
23 % 计算出给定年份下分学段男女教师符合退休年龄的总人数
24 row_result=row_result1+row_result2;
25 disp(row_result);

```

Q2-小学、初中、高中教职工预测.py

```

1 import pandas as pd
2
3 data = pd.read_csv('Q2-各学段预测结果.csv')
4 print('小学')
5 print(data['b'] / 19)
6
7 print('初中')
8 print(data['c'] / 13.5)
9
10 print('高中')
11 print(data['d'] / 12.5)

```

Q2-幼儿园教师预测.py

```

1 import pandas as pd
2
3 data = pd.read_csv('Q2-各学段预测结果.csv')
4
5 print(data['a'] / 6)

```

2.3 问题三相关源代码

Q3-2024-2035 变化总曲线.py

```

1 import pandas as pd
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from matplotlib.font_manager import FontProperties
4 from matplotlib.ticker import MaxNLocator
5 import numpy as np
6
7 # 设置中文字体，确保能够正确显示中文字符
8 font = FontProperties(family='Microsoft YaHei', size=16) # 替换为您的中文字体文件路径
9
10 # 从CSV文件读取数据
11 data = pd.read_csv('Q3-2024-2035新增教师数.csv')
12
13 # 提取数据
14 x_values = data['year']

```

```

15
16
17 # 创建折线图
18 plt.figure(figsize=(8, 6)) # 设置图形大小
19
20 plt.plot(x_values, data['da'], marker='o', linestyle='-', color='lightcoral', label='需求总量')
21 plt.plot(x_values, data['db'], marker='o', linestyle='-', color='lightblue', label='退休减员数')
22 plt.plot(x_values, data['dc'], marker='o', linestyle='-', color='#B19CD9', label='毕业师范生')
23 plt.plot(x_values, data['dd'], marker='o', linestyle='-', color='brown', label='新增教师')
24
25 # plt.title('原始数据序列', fontproperties=font) # 设置标题, 使用中文字体
26 plt.xlabel('年份 (/年)', fontproperties=font) # 设置X轴标签, 使用中文字体
27 plt.ylabel('高中教师数 (/万人)', fontproperties=font) # 设置Y轴标签, 使用中文字体
28 plt.legend(prop=font) # 显示图例, 使用中文字体
29 plt.grid(True, alpha=0.3) # 显示网格
30
31 plt.gca().xaxis.set_major_locator(MaxNLocator(integer=True))
32 plt.show() # 显示图形

```

Q3-师范生人数分布规律.py

```

1 import pandas as pd
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from matplotlib.font_manager import FontProperties
4 from matplotlib.ticker import MaxNLocator
5
6 # 设置中文字体, 确保能够正确显示中文字符
7 font = FontProperties(family='Microsoft YaHei', size=16) # 替换为您的中文字体文件路径
8
9 # 从CSV文件读取数据
10 data = pd.read_csv('Q3-专科师范生数据.csv')
11
12 # 提取数据
13 x_values = data['year']
14
15 # 创建折线图
16 plt.figure(figsize=(8, 6)) # 设置图形大小
17
18 plt.plot(x_values, data['gongfei'], marker='o', linestyle='-', color='lightcoral', label='公费')
19 plt.plot(x_values, data['fei'], marker='o', linestyle='-', color='lightblue', label='非公费')
20 plt.plot(x_values, data['zong'], marker='o', linestyle='-', color='#B19CD9', label='总和')
21
22 # plt.title('原始数据序列', fontproperties=font) # 设置标题, 使用中文字体
23 plt.xlabel('年份 (/年)', fontproperties=font) # 设置X轴标签, 使用中文字体
24 plt.ylabel('专科师范生在校人数 (/万人)', fontproperties=font) # 设置Y轴标签, 使用中文字体
25 plt.legend(prop=font) # 显示图例, 使用中文字体
26 plt.grid(True, alpha=0.3) # 显示网格

```

```

27
28 plt.gca().xaxis.set_major_locator(MaxNLocator(integer=True))
29 plt.show() # 显示图形

```

Q3-计算各学段毕业生人数.py

```

1 import pandas as pd
2 data = pd.read_csv('Q3-2024-2035年师范毕业生预测人数1.csv')['c']
3
4 rate = 0.1694
5
6 print(data * rate)

```

Q3-计算增长率.py

```

1 import pandas as pd
2 data = pd.read_csv('Q3-本科师范生数据.csv')['gongfei']
3
4 for i in range(len(data)):
5     print((data[i] - data[i-1]) / data[i-1] * 100)

```

Q3-计算毕业生人数.py

```

1 import pandas as pd
2 data = pd.read_csv('Q3-专科师范生数据.csv')['gongfei']
3
4 rate = -0.0293
5
6 for i in range(len(data)):
7     print( data[i] / (1 + (1 + rate) + (1 + rate)**2 ))

```

2.4 问题四相关源代码

Q4-缺编科目现实与理想情况对比.py

```

1 import pandas as pd
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import seaborn as sns
4 from matplotlib.font_manager import FontProperties
5
6
7 # 设置中文字体，确保能够正确显示中文字符
8 font = FontProperties(family='Microsoft YaHei', size=14) # 替换为您的中文字体文件路径
9
10 # 从CSV文件中读取数据
11 data = pd.read_csv('Q4-绘制对比图用.csv')

```

```
12
13 # 设置Seaborn风格
14 sns.set(style="whitegrid")
15
16 # 创建分组柱状图
17 plt.figure(figsize=(12, 6))
18 sns.barplot(x='a', y='value', hue='variable', data=data.melt(id_vars=['a'],
19     var_name='variable'))
20 plt.legend(prop=font)
21 # 添加标题和标签
22 plt.xlabel('缺编学科', fontproperties=font)
23 plt.ylabel('所占学段总比列', fontproperties=font)
24 plt.show()
```